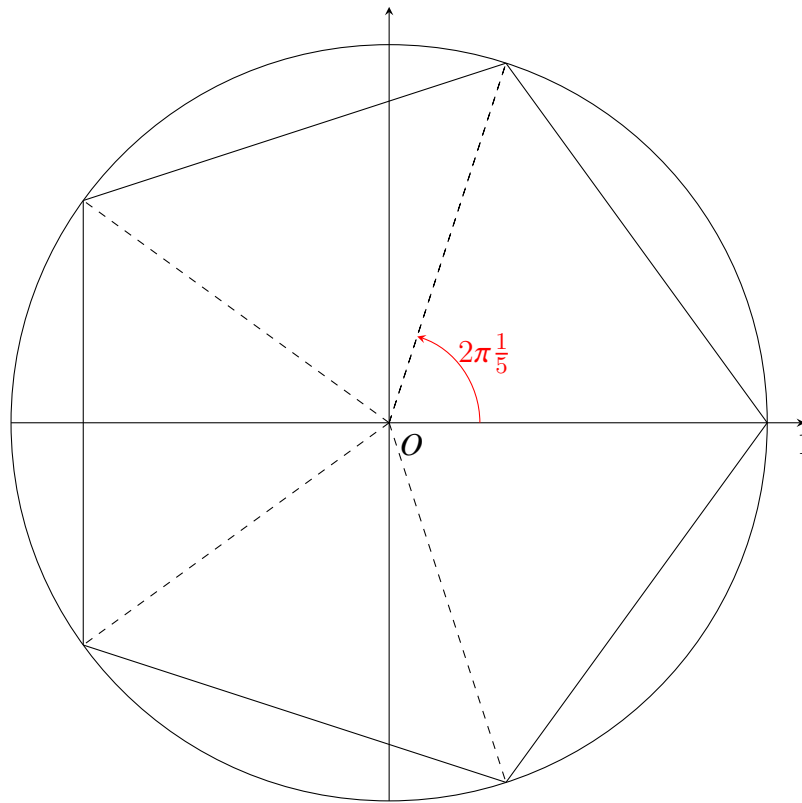




Définition 8 – Racine $n^{\text{ème}}$ d'un complexe non-nul

Soit $a \in \mathbb{C}^*$. On dit que z est une racine $n^{\text{ème}}$ de a lorsque $z^n = a$.

Proposition 17 – Ensemble des racines $n^{\text{èmes}}$ d'un complexe non-nul

Soit $a \in \mathbb{C}^*$. Si on a la forme exponentielle $a = r e^{i\theta}$ alors l'ensemble des racines $n^{\text{èmes}}$ de a est

$$\left\{ r^{1/n} e^{i\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)}, \quad k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket \right\}$$

Démonstration. À PART POUR LES ÉLÈVES

Commençons par remarquer que $z_0 := r^{1/n} e^{i\frac{\theta}{n}}$ est une racine $n^{\text{ème}}$ de a . Ensuite il suffit de remarquer que z est une racine $n^{\text{ème}}$ de a si et seulement si $\frac{z}{z_0}$ est une racine $n^{\text{ème}}$ de l'unité, si et seulement si, il existe $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$ tel que $\frac{z}{z_0} = e^{i2\pi\frac{k}{n}}$, si et seulement s'il existe $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$ tel que $z = z_0 e^{i2\pi\frac{k}{n}}$, ce qui conclut. $\square$

Remarque 18. Inutile d'apprendre ces solutions par cœur, il est beaucoup plus important de savoir refaire cette preuve, ou même mieux encore, savoir adapter-celle des racines $n^{\text{èmes}}$ de l'unité en résolvant ici $R^n e^{in\alpha} = r e^{i\theta}$.

Remarque 19. Une chose qui résume tout : pour trouver toutes les solutions on part d'une solution z_0 (trouvée très vite par forme exponentielle) et on regarde toutes ses rotations de $\frac{2\pi}{n}$ ($n^{\text{èmes}}$ de tour).

Remarque 20. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, la seule racine $n^{\text{ème}}$ de 0 est 0.

Exercice 10. Trouver les racines cubiques de $1 + i$.

IV Exponentielle complexe

Définition 9 – Exponentielle complexe

Soit $z \in \mathbb{C}$. On définit l'exponentielle complexe de z , notée $\exp(z)$ ou e^z par

$$e^z := e^{\operatorname{Re}(z)} e^{i\operatorname{Im}(z)}$$

Ainsi le module de e^z est $e^{\operatorname{Re}(z)}$ et un argument de e^z est $\operatorname{Im}(z)$.

Justification. À PART POUR LES ÉLÈVES

Comme on utilise la même notation, vérifions que cette notion coïncide avec

- notre notion de e^x si $z = x$ est réel. C'est le cas puisqu'on a alors $\exp(z) = \exp(x) \exp(i0) = \exp(x)$.
- Notre notion de e^{it} si $z = it$ est imaginaire pur. C'est le cas car alors $\exp(z) = \exp(0) \exp(it) = \exp(it)$.

□

Exemple 20. $e^{2+3i} = e^2 e^{3i} = e^2 (\cos(3) + i \sin(3))$.

Remarque 21. À ce stade, nous avons une fonction exponentielle définie sur l'axe des réels, et une autre exponentielle définie sur l'axe des imaginaires purs. Nous venons de *prolonger* ces deux fonctions en une fonction sur tout le plan complexe, encore appelée exponentielle. Satisfait-elle les mêmes propriétés? On va voir!

Proposition 18 – Exponentielle d'une somme

Soit z, z_1, z_2 sont des complexes alors

- (i) $\exp(z_1 + z_2) = \exp(z_1) \exp(z_2)$
- (ii) $\frac{1}{\exp(z)} = \exp(-z)$

Démonstration. À PART POUR LES ÉLÈVES

- (i) Notons $z_1 = x_1 + iy_1, z_2 = x_2 + iy_2$. Alors on a

$$\exp(z_1 + z_2) = \exp((x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)) = e^{x_1} e^{iy_1} e^{x_2} e^{iy_2} = e^{z_1} e^{z_2}.$$

- (ii) Par (i), $\exp(z + (-z)) = \exp(0) = 1 = \exp(z) \exp(-z)$.

□

Proposition 19 – Résolution de $\exp(z) = \exp(z')$

Soit z et z' des complexes. On a

$$\exp(z) = \exp(z') \Leftrightarrow z - z' \in 2i\pi\mathbb{Z}.$$

Démonstration. À PART POUR LES ÉLÈVES

$\exp(z) = \exp(z')$ si et seulement si $\exp(z) \exp(-z') = 1$, si et seulement si $\exp(z - z') = 1$, si et seulement si $e^{\operatorname{Re}(z-z')} e^{i\operatorname{Im}(z-z')} = 1 = 1e^{i0}$. Ceci est une équation entre formes exponentielles, elle est vérifiée si et seulement si $\operatorname{Re}(z - z') = 0$ et $\operatorname{Im}(z - z') \equiv 0[2\pi]$, c'est-à-dire si et seulement si $z - z' \in 2i\pi\mathbb{Z}$.

□

Proposition 20 – Résolution de $e^z = a$

Soit $a \in \mathbb{C}^*$ dont la forme exponentielle est $a = re^{i\theta}$. L'ensemble des solutions de $e^z = a$ est

$$\{\ln(r) + i(\theta + 2k\pi), k \in \mathbb{Z}\}$$

Démonstration. À PART POUR LES ÉLÈVES

Comme $a = re^{i\theta} = e^{\ln(r)} e^{i\theta} = e^{\ln(r)+i\theta}$ on a

$$\begin{aligned} e^z = a &\Leftrightarrow e^z = e^{\ln(r)+i\theta} \\ &\Leftrightarrow z - \ln(r) - i\theta \in 2i\pi\mathbb{Z} \end{aligned}$$

□

Exemple 21. À PART POUR LES ÉLÈVES

Les solutions de $e^z = 2 + 3i$ sont les $\frac{1}{2} \ln(13) + \arctan(3/2)i + 2ik\pi, k \in \mathbb{Z}$.

V Interprétations géométriques

Outre les interprétations géométriques du module, de la conjugaison, de l'argument déjà vues ci-dessus, on donne quelques autres interprétations géométriques importantes.

Proposition 21 – Interprétation géométrique de $\frac{z-b}{z-a}$

Soit a, b, z des complexes avec $z \neq a$ et $z \neq b$. On note M, A, B les images respectives dans le plan complexe de z, a, b . On a alors

$$\left| \frac{z-b}{z-a} \right| = \frac{MB}{MA}, \quad \arg\left(\frac{z-b}{z-a}\right) \equiv (\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) [2\pi]$$

Démonstration. À PART POUR LES ÉLÈVES

$$\left| \frac{z-b}{z-a} \right| = \frac{|z-b|}{|z-a|} = \frac{MB}{MA} \text{ et}$$

$$\arg\left(\frac{z-b}{z-a}\right) \equiv \arg\left(\frac{b-z}{a-z}\right) \equiv (\vec{i}, \overrightarrow{MB}) - (\vec{i}, \overrightarrow{MA}) \equiv (\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MA}) [2\pi].$$

□

Corollaire 8 – Alignement, orthogonalité

Avec les notations ci-dessus :

$$A, B, M \text{ sont alignés} \Leftrightarrow \frac{z-b}{z-a} \in \mathbb{R}$$

$$(AM) \text{ et } (BM) \text{ sont orthogonales} \Leftrightarrow \frac{z-b}{z-a} \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow M \text{ appartient au cercle de diamètre } [AB]$$

Démonstration. À PART POUR LES ÉLÈVES

A, B, M sont alignés si, et seulement si, $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) \equiv 0 \text{ ou } \pi [2\pi]$. (AM) et (BM) sont orthogonales si, et seulement si, $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) \equiv \frac{\pi}{2} \text{ ou } \frac{3\pi}{2} [2\pi]$. Un théorème de collège (corollaire du théorème de l'angle au centre) assure par ailleurs que (AM) et (BM) sont orthogonales si et seulement si M est sur le cercle de diamètre $[AB]$. □

Exemple 22. À PART POUR LES ÉLÈVES

L'ensemble des $z \in \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$ tels que le triangle de sommets z, z^2, z^3 soit rectangle en z est constitué de la droite verticale d'équation $\operatorname{Re}(z) = -1$. En effet pour $z \notin \{0, 1\}$,

$$\frac{z^3 - z}{z^2 - z} \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow \frac{z(z-1)(z+1)}{z(z-1)} \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow \operatorname{Re}(z+1) = 0 \Leftrightarrow \operatorname{Re}(z) = -1.$$

Définition 10 – Similitudes directes

On appelle *similitude directe* du plan complexe toute fonction de la forme $z \mapsto az + b$ où $a \neq 0$ et b sont des complexes fixés.

On donne ci-dessous les interprétations géométriques dans les cas les plus simples.

Cas $a = 1$

Translation de vecteur b

Cas $b = 0, a = r > 0$

Homothétie de centre O
et rapport r

Cas $b = 0, a = e^{i\theta}$

Rotation de centre O
et angle θ

Exemple 23. Multiplier un complexe par i correspond à une rotation de $\frac{\pi}{2}$.

Remarque 22. On peut bien sûr les combiner, par exemple $z \mapsto 2e^{i\pi/4}z + 3 + 2i$ est la composée d'une rotation d'angle $\pi/4$ par rapport à l'origine, d'une homothétie de centre l'origine et rapport 2, et enfin d'une translation de vecteur $3 + 2i$.

On donne enfin une méthode pour le cas général, qui permet même de se passer des translations quand f n'en est pas une. À PART POUR LES ÉLÈVES

- Si $a = 1$ alors f est une translation de vecteur b .
- Sinon, l'équation $f(z) = z$ admet une unique solution (qu'on appelle *point fixe* de f) qui est $\omega := \frac{b}{1-a}$. Notons alors $z' = f(z)$. On a

$$z' - \omega = (az + b) - (a\omega + b) = a(z - \omega) = |a|e^{i\arg(a)}(z - \omega)$$

et ainsi, f est la composée d'une rotation et d'une homothétie de mêmes centres ω (l'ordre de cette composition n'importe pas). On dit que f est la similitude directe de centre ω , de rapport $|a|$ et d'angle de mesure $\arg(a)$.

Exemple 24. À PART POUR LES ÉLÈVES

$z \mapsto 2iz + 1$ est la similitude directe de centre $\frac{1+2i}{5}$, de rapport 2 et d'angle $\frac{\pi}{2}$. En effet, $2i \neq 1$ donc on résout $z = 2iz + 1$, c'est-à-dire $z = \frac{1}{1-2i} = \frac{1+2i}{5}$. f a donc pour centre $\omega := \frac{1+2i}{5}$, pour rapport $|2i| = 2$, et pour angle $\arg(2i) = \frac{\pi}{2}$.

Remarque 23. On pourrait aussi parler des similitudes *indirectes* $z \mapsto a\bar{z} + b$ mais si l'on se souvient que $z \mapsto \bar{z}$ est la symétrie par rapport à l'axe des réels, on s'en sort très bien en composant avec le cas général précédent !

VI Extensions du chapitre 3

Dans toute cette partie, I et J désignent des intervalles de $\mathbb{R}$.

Définition 11 – Parties réelle et imaginaire d'une fonction à valeurs complexes

Soit $f: I \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction. On appelle respectivement parties réelles et imaginaires de f les fonctions définies sur I par

$$\operatorname{Re}(f): t \mapsto \operatorname{Re}(f(t)), \quad \operatorname{Im}(f): t \mapsto \operatorname{Im}(f(t)).$$

Définition 12 – Dérivabilité d'une fonction à valeurs complexes

Soit $f: I \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction. f est dite dérivable sur I lorsque $\operatorname{Re}(f)$ et $\operatorname{Im}(f)$ le sont, auquel cas on définit

$$f' := (\operatorname{Re}(f))' + i(\operatorname{Im}(f))'$$

Remarque 24. En clair, dériver une fonction à valeurs complexes revient à dériver ses parties réelle et imaginaire, toutes deux des fonctions à valeurs réelles :

$$\operatorname{Re}(f') := (\operatorname{Re}(f))', \quad \operatorname{Im}(f') := (\operatorname{Im}(f))'$$

Exemple 25. À PART POUR LES ÉLÈVES

$f: t \mapsto e^t + i \arctan(t)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel t ,

$$f'(t) = e^t + i \frac{1}{1+t^2}$$

Les propriétés déjà vues relatives aux opérations restent vraies.

Proposition 22 – Opérations élémentaires et dérivées

Soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$ et f, g deux fonctions dérivables sur I , à valeurs complexes. Alors $(\lambda f + \mu g)$ et fg le sont aussi et :

$$(\lambda f + \mu g)' = \lambda f' + \mu g', \quad (fg)' = f'g + fg'$$

Si de plus g ne s'annule pas sur I alors f/g est dérivable sur I et

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$$

Démonstration. À PART POUR LES ÉLÈVES

On note $f = u_1 + iv_1$, $g = u_2 + iv_2$.

On a alors $(\lambda f + \mu g) = (\lambda u_1 + \mu u_2) + i(\lambda v_1 + \mu v_2)$ et donc f est dérivable car ses fonctions parties réelles et imaginaires le sont, comme combinaisons linéaires de telles fonctions (à valeurs réelles!) et $(\lambda f + \mu g)' = (\lambda u_1 + \mu u_2)' + i(\lambda v_1 + \mu v_2)' = \lambda u_1' + \mu u_2' + i(\lambda v_1' + \mu v_2') = \lambda(u_1' + iv_1') + \mu(u_2' + iv_2') = \lambda f' + \mu g'$.

Pour le produit, on développe les deux membres de l'égalité et on constate qu'ils sont égaux (exercice).

Pour le quotient, vu qu'on a le produit, il suffit de le vérifier pour l'inverse $\frac{1}{g}$. □

Exemple 26. À PART POUR LES ÉLÈVES

$x \mapsto \frac{1}{x+i}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme quotient de telles fonctions dont le dénominateur ne s'annule pas et sa dérivée est $x \mapsto -\frac{1}{(x+i)^2}$.

Proposition 23

Soit $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ et $g: J \rightarrow \mathbb{C}$. Si f est dérivable sur I , à valeurs dans J , et si g est dérivable sur J , alors $g \circ f$ est dérivable sur I et

$$(g \circ f)' = (g' \circ f) \times f'$$

Démonstration. À PART POUR LES ÉLÈVES

En notant $u := \operatorname{Re}(g)$ et $v := \operatorname{Im}(g)$ on a pour tout $t \in I$, $g \circ f(t) = u(f(t)) + iv(f(t))$. Par la version réelle de la dérivée composée, $u \circ f$ et $v \circ f$ sont dérivables sur I et donc $g \circ f$ l'est avec

$$(g \circ f)' = (u' \circ f) \times f' + i(v' \circ f) \times f' = (u' \circ f + iv' \circ f) f' = ((u' + iv') \circ f) \times f' = (g' \circ f) \times f'.$$

□

Exemple 27. À PART POUR LES ÉLÈVES

$t \mapsto (\arcsin(t) + i)^2$ est dérivable sur $] -1, 1[$, en effet $t \mapsto \arcsin(t)$ l'est, à valeurs dans $\mathbb{R}$ et $y \mapsto (y + i)^2$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ (car polynomiale). De plus pour tout $t \in] -1, 1[$ on a

$$\frac{d}{dt} (\arcsin(t) + i)^2 = 2(\arcsin(t) + i) \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}.$$

En revanche on énonce un cas particulier de composée dans l'autre sens :

Proposition 24 – Dérivée de $\exp(\varphi)$

Soit $\varphi: I \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction dérivable. Alors $\exp \circ \varphi$, parfois notée $\exp(\varphi)$, est dérivable sur I et

$$\exp(\varphi)' = \varphi' \exp(\varphi).$$

Démonstration. À PART POUR LES ÉLÈVES

A priori ça n'a rien d'évident vu qu'on compose une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ par une fonction de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$. Le résultat est une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ et il faut vérifier la définition ci-dessus.

Posons $u := \operatorname{Re}(\varphi)$, $v := \operatorname{Im}(\varphi)$. Par définition de la dérivabilité de φ , u et v sont dérivables. De plus, $\exp(\varphi) = \exp(u + iv) = \exp(u) \exp(iv) = e^u (\cos(v) + i \sin(v))$ donc $\operatorname{Re}(\exp(\varphi)) = e^u \cos(v)$ et $\operatorname{Im}(\exp(\varphi)) = e^u \sin(v)$. Ces fonctions sont donc dérivables comme produit et composées de fonctions dérivables, ainsi $\exp(\varphi)$ est dérivable. De plus, par les règles de produit et composée,

$$\begin{aligned} (\operatorname{Re}(e^\varphi))' &= u' e^u \cos(v) - e^u v' \sin(v) \\ &= e^u (u' \cos(v) - v' \sin(v)) \\ &= e^u \operatorname{Re}((u' + iv')(\cos(v) + i \sin(v))) \\ &= \operatorname{Re}((u' + iv') e^u (\cos(v) + i \sin(v))) \\ &= \operatorname{Re}(\varphi' e^\varphi) \end{aligned}$$

On montre de même que $(\operatorname{Im}(e^\varphi))' = \operatorname{Im}(\varphi' e^\varphi)$ ce qui conclut.

□

Exemple 28. Fondamental. À PART POUR LES ÉLÈVES

Si $a \in \mathbb{C}$ alors $t \mapsto e^{at}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et a pour dérivée $t \mapsto a e^{at}$.

Exemple 29. À PART POUR LES ÉLÈVES

$x \mapsto e^{x^2+2ix}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ car $x \mapsto x^2 + 2ix$ l'est, et sa dérivée est $x \mapsto 2(x + i)e^{x^2+2ix}$.

Remarque 25. On perd bien sûr tout lien entre monotonie et dérivée : puisqu'il n'y a pas de relation d'ordre $\leq$ naturelle sur $\mathbb{C}$, cela n'a même pas de sens de dire qu'une fonction à valeurs complexes est croissante, ou que sa dérivée est positive. En revanche on garde le fait que sur un intervalle, une fonction est constante si et seulement si sa dérivée est nulle (cf. chapitre suivant).

Fiche « je sais faire ». Chapitre 4 – Nombres complexes

Cette liste présente un certain nombre de savoir-faire incontournables. Les maîtriser est nécessaire, mais n'est bien sûr pas suffisant : il faut aussi savoir calculer avec les outils adaptés, apprendre ses définitions et ses résultats, Vous pouvez vous aider de cette fiche pour vos révisions. Remplissez-la au crayon : elle servira plusieurs fois !

- ☐ Calculer avec des nombres complexes (les additionner, les multiplier, diviser, écrire le résultat sous forme algébrique)
- ☐ Calculer des sommes géométriques, factoriser $a^n - b^n$, la formule du binôme
- ☐ Calculer avec des conjugués, des modules, les représenter graphiquement.
- ☐ Exprimer la partie réelle et imaginaire à l'aide du conjugué, traduire le fait d'être réel ou imaginaire pur.
- ☐ Écrire ou reconnaître des équations de cercles et de disques.
- ☐ Calculer avec les $e^{i\theta}$, les représenter géométriquement.
- ☐ Passer de la forme algébrique à la forme exponentielle et réciproquement.
- ☐ Trouver un argument d'un nombre complexe donné sous forme algébrique. Calculer avec des arguments.
- ☐ Linéariser des expressions trigonométriques.
- ☐ Factoriser par l'angle moyen.
- ☐ Retrouver les formules de $\cos(p) \pm \cos(q)$, $\sin(p) \pm \sin(q)$.
- ☐ Retrouver les formules de $\cos(nt)$, $\sin(nt)$ pour un $n \in \mathbb{N}$ donné.
- ☐ Calculer $\sum_{k=0}^n \cos(kt)$, $\sum_{k=0}^n \sin(kt)$.
- ☐ Ré-écrire $a \cos(t) + b \sin(t)$ en un $A \cos(t - \varphi)$.
- ☐ Trouver les racines carrées complexes d'un nombre complexe donné sous forme algébrique.
- ☐ Résoudre des équations du second degré dans $\mathbb{C}$ (y compris celles à coefficients complexes).
- ☐ Exprimer les racines $n^{\text{èmes}}$ de l'unité et les représenter géométriquement.
- ☐ Donner les racines $n^{\text{èmes}}$ d'un complexe non-nul donné sous forme exponentielle.
- ☐ Calculer avec des exponentielles complexes.
- ☐ Résoudre $e^z = a$.
- ☐ Interpréter géométriquement $\left| \frac{z-b}{z-a} \right|$. Traduire alignement, orthogonalité.
- ☐ Interpréter géométriquement les fonctions de type $z \mapsto az + b$.
- ☐ Comprendre le principe de la dérivation d'une fonction à valeurs complexes, ce qui marche encore, ce qui ne marche plus.