

Preuve Prop A

$z_0 = r^{1/n} e^{i\theta/n}$ est clairement solution. Dès lors

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad z^n = a \\ \Leftrightarrow z^n = z_0^n$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{z}{z_0}\right)^n = 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{z}{z_0} \in \mathcal{U}_n$$

$$\Leftrightarrow \exists k \in [0, n-1] \text{ tq } \frac{z}{z_0} = e^{i2k\pi/n}$$

$$\Leftrightarrow \exists k \in [0, n-1], \quad z = r^{1/n} e^{i\theta/n} e^{i2k\pi/n} \quad \square$$

Autre preuve (cf. Ex 18):

$$\forall R > 0 \text{ et } \forall \alpha \in [0, 2\pi[,$$

$$(R e^{i\alpha})^n = r e^{i\alpha}$$

$$\Leftrightarrow R^n e^{in\alpha} = r e^{i\alpha}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} R^n = r \\ n\alpha \equiv \alpha \pmod{2\pi} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} R = r^{1/n} \\ \alpha \equiv \frac{\alpha}{n} \pmod{\frac{2\pi}{n}} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} R = r^{1/n} \\ \exists k \in [0, n-1], \alpha = \frac{\alpha + 2k\pi}{n} \end{cases}$$

Exo 10: $1+i = \sqrt{2} e^{i\pi/4}$ donc ses racines cubiques
 sont $(\sqrt{2})^{1/3} e^{i\pi/12}$, $(\sqrt{2})^{1/3} e^{i5\pi/12}$, $(\sqrt{2})^{1/3} e^{i17\pi/12}$

Justif Def 9

Coïncide bien avec l'exp. réelle (quand $\text{Im}(z)=0$)
 et celle de l'im. pure (quand $\text{Re}(z)=0$).

Preuve Prop 18

(i) Notons $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$. Alors

$$\exp(z_1 + z_2) = \exp((x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2))$$

$$\stackrel{\text{Def}}{=} e^{x_1 + x_2} e^{i(y_1 + y_2)}$$

$$= e^{x_1} e^{iy_1} e^{x_2} e^{iy_2}$$

$$= e^{z_1} e^{z_2}.$$

(ii) Par (i), $\exp(z + (-z)) = \exp(0) = 1$

$$\exp(z) \exp(-z)$$

□

Preuve Prop 19

$$e^{p(z)} = e^{p(z')}$$

$$\Leftrightarrow e^{p(z-z')} = 1$$

$$\Leftrightarrow e^{\operatorname{Re}(z-z')} e^{i \operatorname{Im}(z-z')} = 1 e^{i0}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} e^{\operatorname{Re}(z-z')} = 1 \\ \operatorname{Im}(z-z') \equiv 0 [2\pi] \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \operatorname{Re}(z-z') = 0 \\ \operatorname{Im}(z-z') \equiv 0 [2\pi] \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \operatorname{Re}(z) = \operatorname{Re}(z') \\ \operatorname{Im}(z) \equiv \operatorname{Im}(z') [2\pi] \end{cases} \quad \square$$

$$\Leftrightarrow z - z' \in 2i\pi\mathbb{Z} \quad (= \{2i\pi k \mid k \in \mathbb{Z}\}).$$

□

Preuve Prop 20

$$a = re^{i\theta} = e^{\ln(r)} e^{i\theta} = e^{\ln(r) + i\theta}.$$

Ainsi on a $\forall z \in \mathbb{C}$,

$$e^z = a \Leftrightarrow e^z = e^{\ln(r) + i\theta} \Leftrightarrow z - \ln(r) - i\theta \in 2i\pi\mathbb{Z} \quad \square$$

Ex 21

Résolution de $\exp(z) = 2+3i$

$$\underbrace{2+3i}_{>0} = \sqrt{13} e^{i \arctan(3/2)}$$

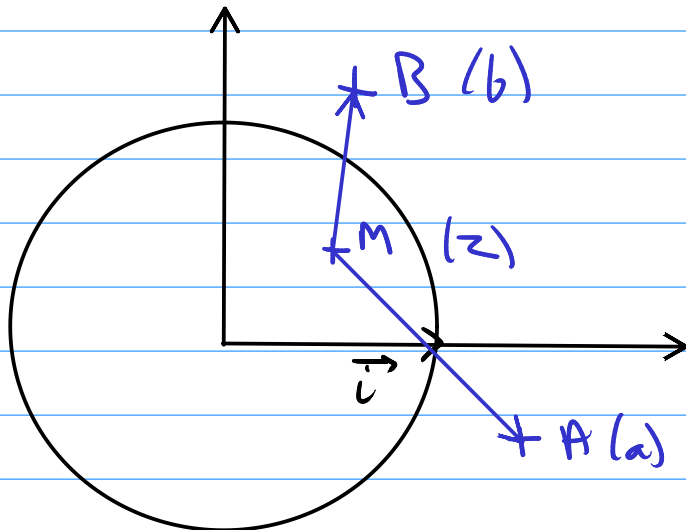
Donc les solutions sont les

$$\ln(\sqrt{13}) + i(\arctan(3/2) + 2k\pi), \quad k \in \mathbb{Z}$$

Preuve Prop 21

$$\left| \frac{z-b}{z-a} \right| = \frac{|z-b|}{|z-a|} = \frac{MB}{MA}$$

$$\begin{aligned} \arg\left(\frac{z-b}{z-a}\right) &\equiv \arg\left(\frac{b-z}{a-z}\right) \equiv \arg(b-z) - \arg(a-z) [2\pi] \\ &\equiv (\vec{i}, \vec{MB}) - (\vec{i}, \vec{MA}) [2\pi] \end{aligned}$$



Preuve Cor. 8

$$A, B, M \text{ alignés} \Leftrightarrow (\vec{MA}, \vec{MB}) \equiv 0 [\pi]$$

$$\Leftrightarrow \frac{z-b}{z-a} \in \mathbb{R}$$

$$(AM) \perp (BM) \Leftrightarrow (\vec{MA}, \vec{MB}) \equiv \frac{\pi}{2} [\pi]$$

$$\Leftrightarrow \frac{z-b}{z-a} \in i\mathbb{R}$$

$\Leftrightarrow M \in \text{cercle de diamètre } [AB].$
Th. angle
au centre

□

Ex 22

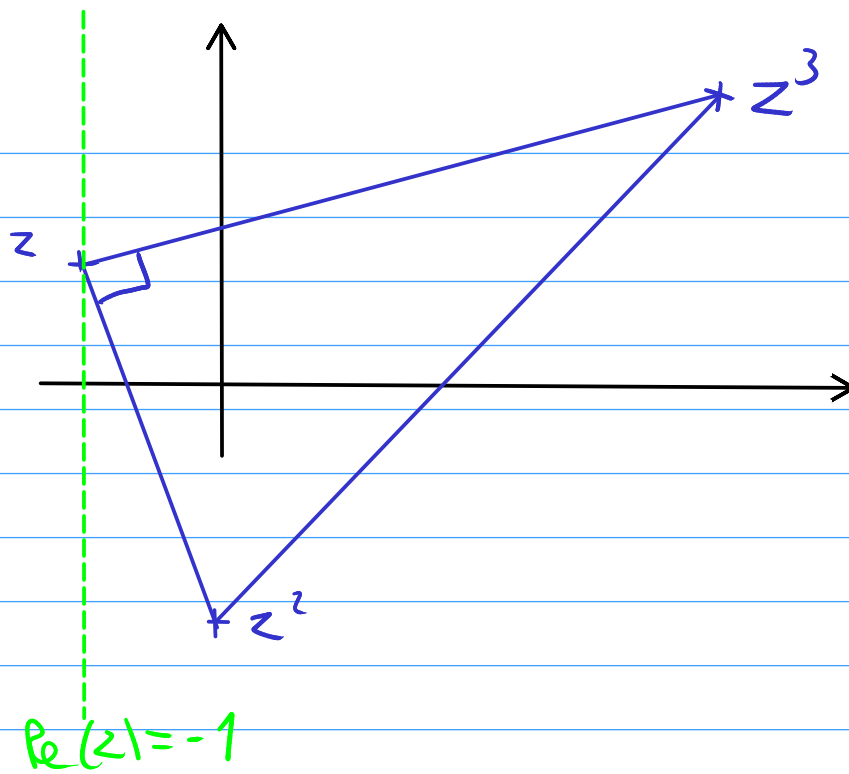
L'ensemble des $z \in \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$ t.q. le triangle de sommets z, z^2, z^3 soit rectangle en z est constitué de la droite d'éq. $\operatorname{Re}(z) = -1$.

En effet $\forall z \in \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$,

$$\frac{z^3 - z}{z^2 - z} \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow \frac{z(z-1)(z+1)}{z(z-1)} \in i\mathbb{R}$$

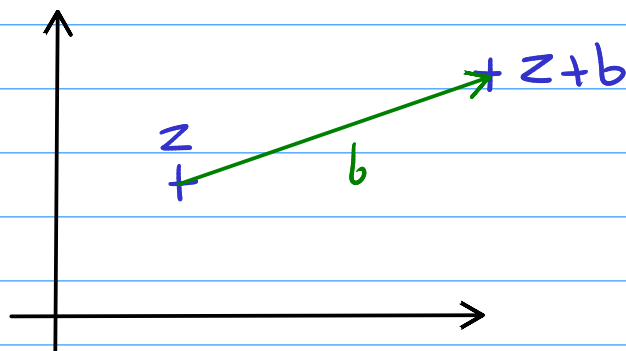
$$\Leftrightarrow z+1 \in i\mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \operatorname{Re}(z+1) = 0 \Leftrightarrow \operatorname{Re}(z) = -1$$

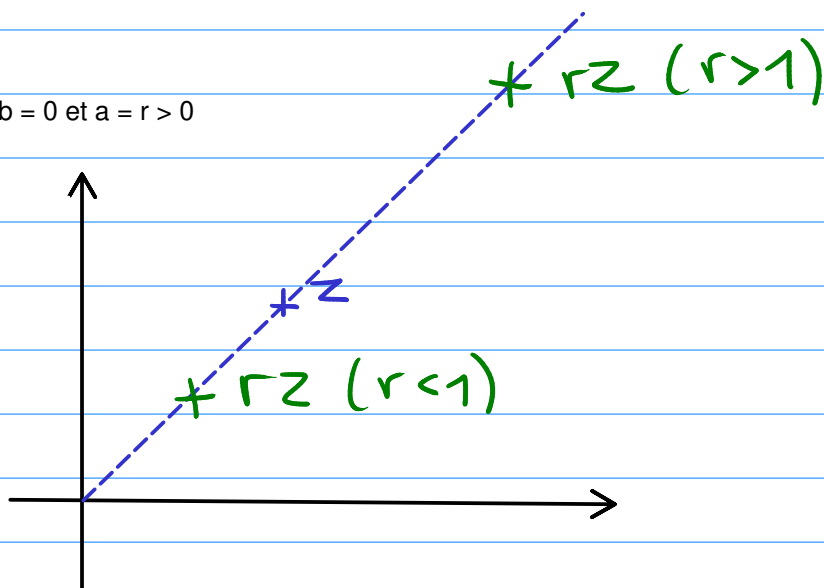


Interprétations géométriques des similitudes directes

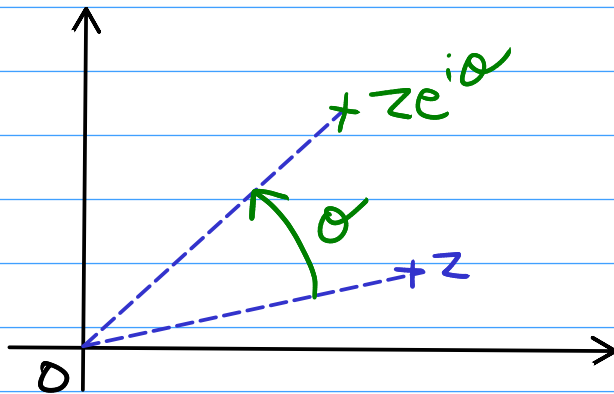
Cas $a = 1$



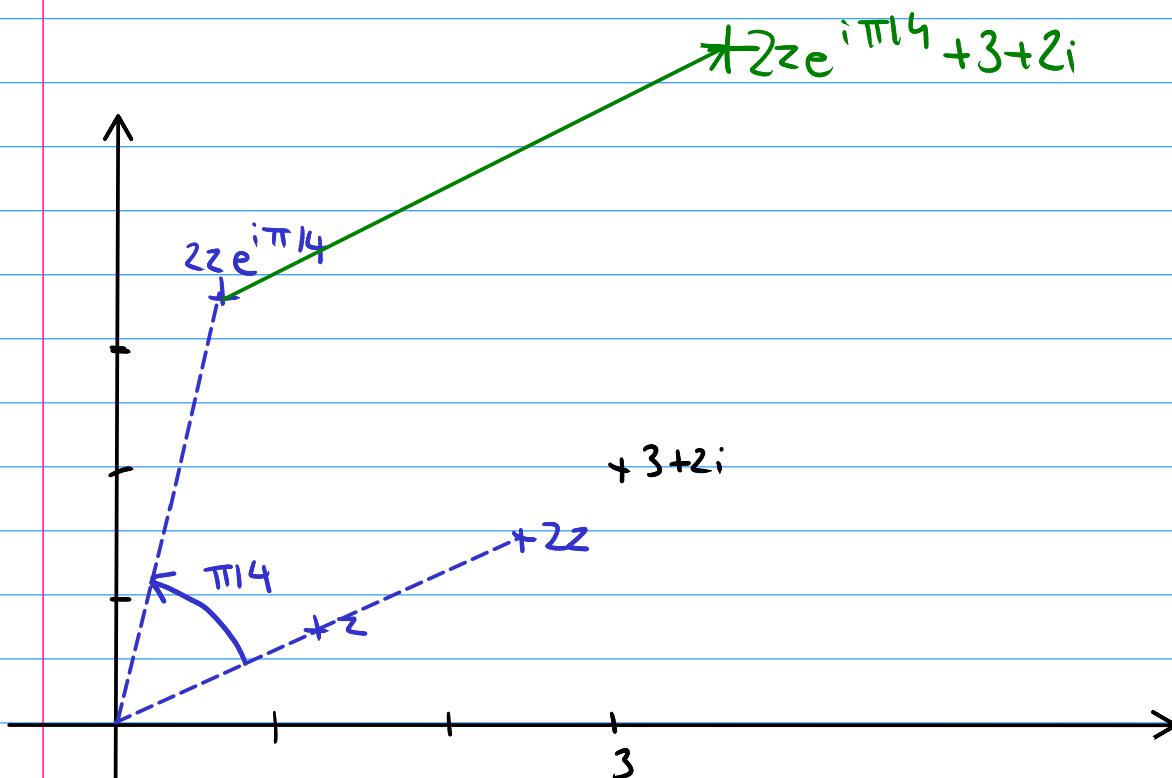
Cas $b = 0$ et $a = r > 0$



Cas $b = 0$, $r = \exp(i\theta)$



Ex 23 : multiplier un complexe par i correspond à une rotation d'angle $\pi/2$



Méthode

- Si $a=1$, f est une translation de vecteur b .
- Sinon on résout l'éq. de pt. fixe

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad f(z) = z$$

$$\Leftrightarrow az + b = z$$

$$\Leftrightarrow b = z(1-a)$$

$$\Leftrightarrow \boxed{z = \frac{b}{1-a}} =: \omega$$

Notons $z' = f(z)$. On a alors

$$\begin{aligned} z' - w &= (az + b) - (aw + b) \\ &= a(z - w) \\ &= |a|e^{i\arg(a)} (z - w) \end{aligned}$$

Ainsi f est la composée d'une rotation et d'une homothétie de mêmes centres w . On dit que f est la similitude directe de centre w , rapport $|a|$, angle de mesure $\arg(a)$.

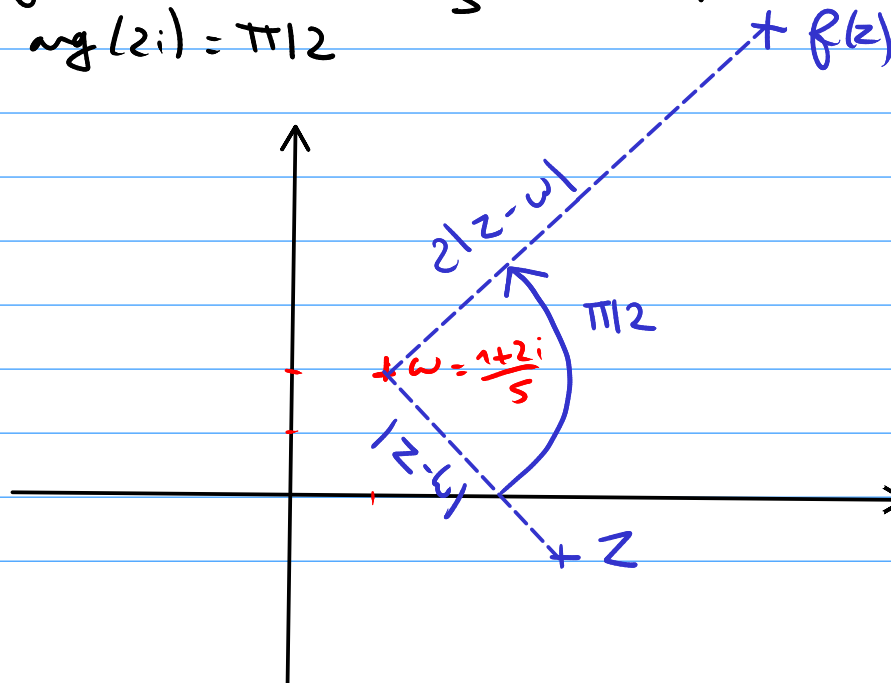
Ex 24

$$f: z \mapsto 2iz + 1?$$

$$\forall z \in \mathbb{C}, z = 2iz + 1 \Leftrightarrow z = \frac{1}{1-2i}$$

$$z = \frac{1+2i}{5}$$

Donc f est de centre $\frac{1+2i}{5}$, rapport $|2i|=2$, angle $\arg(2i) = \pi/2$



Ex25

$f: t \mapsto e^t + i \arctan(t)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$

$$\text{et } \forall t \in \mathbb{R}, f'(t) = e^t + i \frac{1}{1+t^2}$$

Ex26

$x \mapsto \frac{1}{x+i}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme quotient de deux fcts dont le dénominateur ne s'annule pas, et sa dérivée

$$\text{est } x \mapsto - \frac{1}{(x+i)^2}.$$

Ex27

$t \mapsto (\arcsin(t) + i)^2$ est dérivable sur $]-1, 1[$ car

$\arcsin$ est dérivable sur $]-1, 1[$, à valeurs dans

$\mathbb{R}$ et $y \mapsto (y+i)^2$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ (polynôme).

et $\forall t \in \mathbb{R},$

$$\frac{d}{dt} (\arcsin(t) + i)^2 = 2 (\arcsin(t) + i) \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}.$$