

Exercice 1. Des calculs

Mettre sous forme algébrique

$$\frac{2+i}{3+i}, \quad \frac{(2+i)(1-4i)}{1+i}$$

Exercice 2. Des calculs

Déterminer le conjugué de chacun des nombres complexes suivants, l'exprimer sous forme algébrique.

1. $(3+i)(-13-2i)$

3. $\frac{2-3i}{8+5i}$

2. $i(1-i)^3$

4. $\frac{2}{1+i} - \frac{3}{1-i}$

Exercice 3. Le plan complexeSoit A, B, C les points du plan d'affixes respectives $z_A = -1 + i$, $z_B = 2 + i$, $z_C = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$.1. Placer A, B, C .2. Calculer les affixes des vecteurs $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BC}$.3. En déduire les longueurs AB, AC, BC .**Exercice 4.**

Déterminer la forme exponentielle des complexes suivants.

1. $z_0 = 1 + i$

4. $z_3 = 1 + 2i$

2. $z_1 = -i$

5. $z_4 = -\frac{3}{2} - i$

3. $z_2 = -\sqrt{3} + i$

6. $z_5 = e^{\frac{2i\pi}{5}} + e^{\frac{-i\pi}{5}}$

Exercice 5.1. Soit $t \in \mathbb{R}$. Déterminer la partie réelle des complexes suivants (attention aux valeurs de t pour lesquelles ils ne sont pas définis) :

$$z_1 = \frac{2+i}{1+2i} \quad z_2 = (1+i)^5 \quad z_3 = \frac{e^{-it}}{1+3i} \quad z_4 = \frac{1}{2-e^{it}}$$

2. Déterminer le module de z_1, z_2, z_3 et z_4 .**Exercice 6.**1. Soit $z = e^{i\frac{\pi}{3}}$. Placer dans le plan complexe les nombres z^n , où $n \in \mathbb{N}$.2. Même question avec $z = \frac{5e^{i\frac{\pi}{3}}}{4}$.3. Même question avec $z = \frac{4e^{i\frac{\pi}{3}}}{5}$.

Exercice 7. Identité du parallélogramme

Soit $z, z' \in \mathbb{C}$. Montrer que

$$|z + z'|^2 + |z - z'|^2 = 2(|z|^2 + |z'|^2).$$

Interpréter géométriquement le résultat.

Exercice 8. Calculs

1. Déterminer la forme algébrique et le module de $\frac{(2-i)(5+2i)}{3-4i}$.
 2. Simplifier $(1+i)^{20}$ et, pour $n \in \mathbb{N}$, $(1+i)^n - (1-i)^n$.
 3. Simplifier $(1+i)(1+2i)(1+3i)$. En considérant les arguments, quel résultat retrouve-t-on?
-

Exercice 9. Simplifications

1. Simplifier $\operatorname{Re}\left(\frac{1}{1-z}\right)$ pour $z \in \mathbb{U} \setminus \{1\}$.
 2. Simplifier $\frac{e^{i\theta}-1}{e^{i\theta}+1}$ pour $\theta \in]-\pi, \pi[$.
-

Exercice 10. Équations

Résoudre les équations suivantes d'inconnue $z \in \mathbb{C}$:

- | | |
|--|--|
| 1. $ z + 1 = z + 1 $ | 7. $z^4 + 2 - i\sqrt{12} = 0$ |
| 2. $\operatorname{Re}\left(\frac{z-1}{z-i}\right) = 0$ | 8. $z^3 = \bar{z}$ |
| 3. $\operatorname{Re}(z^3) = \operatorname{Im}(z^3)$ | 9. $2z + 3\bar{z} = 1$ |
| 4. $z^2 + (5-2i)z + 5 - 5i = 0$ | 10. $z^4 - z^3 + z^2 - z + 1 = 0$ |
| 5. $z^2 - 2z + 1 = 0$ | 11. $\frac{z-i}{z+i} = \frac{z+2}{z-3i}$ |
| 6. $z^2 - (9-2i)z + 26 = 0$ | 12. $2z + 6\bar{z} = 3 + 2i$ |
-

Exercice 11. Linéarisation

Linéariser $\sin(x)^4$; en déduire une expression simple de la somme

$$\sin^4\left(\frac{\pi}{8}\right) + \sin^4\left(\frac{3\pi}{8}\right) + \sin^4\left(\frac{5\pi}{8}\right) + \sin^4\left(\frac{7\pi}{8}\right)$$

Exercice 12. Calcul de sommes (*)

Soit $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. Calculer

$$S_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cos(kx), S'_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \sin(kx) \text{ et } S''_n = \sum_{k=0}^n (-1)^k \cos(kx)$$

Exercice 13. Exponentielles complexes

Résoudre les équations suivantes d'inconnue $z \in \mathbb{C}$:

$$1. e^z = 1 + i$$

$$3. e^z + e^{-z} = 1$$

$$2. e^z = -5 - 12i$$

$$4. e^z + 2e^{-z} = i$$

Exercice 14. *Encore des calculs de cosinus et de sinus*

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. Exprimer $\cos(5x)$ en fonction de $\cos(x)$.
2. En déduire une expression explicite de $\cos^2\left(\frac{\pi}{10}\right)$, $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$, $\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)$.

Exercice 15.

Déterminer l'ensemble des $z \in \mathbb{C}$ qui vérifient $|z - 1| = |z - i|$:

1. par un raisonnement purement géométrique ;
2. par un raisonnement purement algébrique.

Exercice 16.

Soit z et z' deux complexes non nuls et de même module, montrer que

$$U = \frac{(z + z')^2}{zz'}$$

est un nombre réel positif.

Exercice 17.

Pour quelles valeurs de $n \in \mathbb{N}$ le complexe $(1 + i\sqrt{3})^n$ est-il un réel positif ?

Exercice 18.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Calculer la somme des racines $n^{\text{èmes}}$ de l'unité.
2. De même avec leur produit.

Exercice 19.

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $(i + z)^n = (i - z)^n$.

Exercice 20. *Géométrie*

Soit $z \in \mathbb{C}$. Trouver une condition nécessaire et suffisante sur z pour que :

1. z et z^2 soient les affixes de deux vecteurs colinéaires.
2. z et z^2 soient les affixes de deux vecteurs orthogonaux.
3. $1, z$ et z^2 soient les affixes de trois points alignés.
4. (*) z et ses deux racines carrées soient les affixes de trois points formant un triangle rectangle en z .

Exercice 21. *Théorème de l'angle au centre*

On considère trois points A, B, C distincts du cercle de centre O et de rayon 1 d'affixe respectifs a, b, c .

1. Justifier qu'il existe $\theta_A, \theta_B, \theta_C \in \mathbb{R}$ tels que $a = e^{i\theta_A}$, $b = e^{i\theta_B}$ et $c = e^{i\theta_C}$.

2. Montrer que

$$\frac{b-c}{a-c} = \frac{e^{i\frac{\theta_B+\theta_C}{2}} \sin\left(\frac{\theta_B-\theta_C}{2}\right)}{e^{i\frac{\theta_A+\theta_C}{2}} \sin\left(\frac{\theta_A-\theta_C}{2}\right)}.$$

3. En déduire que

$$\arg\left(\frac{b-c}{a-c}\right) \equiv \frac{\theta_B - \theta_A}{2} [\pi].$$

Interpréter géométriquement le résultat.

Exercice 22. *Un théorème classique de géométrie plane*

Soit ABC un triangle dont les points ont pour affixes a, b et c et dont le centre du cercle circonscrit est en l'origine O .

1. Montrer que l'orthocentre de ABC a pour affixe $a + b + c$.
2. En déduire que le centre de gravité, le centre du cercle circonscrit et l'orthocentre d'un triangle sont alignés.

Lorsque le triangle n'est pas équilatéral, la droite par laquelle passent ces trois points est appelée **droite d'Euler** du triangle, dont l'étude est un classique de la géométrie du triangle.

Exercice 23. (*) *Équilatéritude*

Soit A, B, C trois points d'affixes a, b, c , tous distincts.

1. Montrer que ABC est un triangle équilatéral direct si et seulement si $a + jb + j^2c = 0$, et un triangle équilatéral indirect si et seulement si $a + jc + j^2b = 0$.
 2. Montrer que ABC est un triangle équilatéral si et seulement si $a^2 + b^2 + c^2 = ab + ac + bc$.
-