

DM2 – CALCUL ALGÈBRE

Devoir facultatif pour le 22/09/2023.

Bien suivre les consignes du DS1.

Exercice 1. Somme des inversesPour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose :

$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$$

Le but de cet exercice est de montrer que S_n n'est jamais un entier dès que n est plus grand que 2. Pour cela, on va montrer que S_n s'écrit toujours comme le rapport d'un entier impair sur un entier pair. On note $\mathcal{A}$ l'ensemble des réels qui peuvent s'écrire comme le quotient d'un entier impair sur un entier pair.

1. Traduire cette définition de $\mathcal{A}$ avec des notations ensemblistes ($\mathcal{A} = \{ \dots \}$).
2. Vérifier que $\mathcal{A}$ ne contient aucun entier.
3. Soit $n \geq 2$ un entier pair. Montrer que si $S_n \in \mathcal{A}$, alors $S_{n+1} \in \mathcal{A}$.
4. Pour tout $p \in \mathbb{N}$, on note I_p la somme des inverses des entiers impairs jusqu'à $(2p+1)$:

$$I_p = \sum_{k=0}^p \frac{1}{2k+1} = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{2p+1}$$

Montrer par récurrence que pour tout $p \in \mathbb{N}$, il existe des entiers $r_p, s_p \in \mathbb{N}$ tels que $I_p = \frac{r_p}{2s_p+1}$.

5. Soit $n \geq 3$ un entier impair. Il existe donc $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $n = 2p+1$.

(a) Montrer que l'on a :

$$S_{2p+2} = \frac{1}{2}S_{p+1} + I_p$$

(b) Dédire des questions précédentes que si $S_{p+1} \in \mathcal{A}$, alors $S_{n+1} \in \mathcal{A}$.

6. Dédire de toutes les questions précédentes que pour tout $n \geq 2$, $S_n \notin \mathbb{N}$.

Indication : on pourra effectuer une récurrence forte. Sur le même principe qu'une récurrence classique, on montre $\mathcal{P}(0)$ en initialisation, puis

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad ((\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, \mathcal{P}(k)) \Rightarrow \mathcal{P}(n+1))$$

Imaginez un être peureux et extensible qui a besoin de se tenir sur tous les barreaux de l'échelle depuis le début en permanence.