Concours blanc du 04/06/2025

Durée : 4h.

Ce concours blanc est constitué de de **deux parties indépendantes notées chacune sur 10 points**. Les candidats répondront sur deux copies **indépendantes**, chacune correspondant à une partie.

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte. Les candidats sont invités à encadrer les résultats de leurs calculs. Ils pourront admettre et utiliser le résultat d'une question non résolue s'ils l'indiquent clairement sur la copie. Il convient en particulier de rappeler avec précision les **références** des questions abordées.

Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Partie Analyse

On considère pour tout le problème f définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*,\ f(x) = \frac{\mathrm{Arctan}(x)}{x} \text{ et } f(0) = 1.$$

Première étude de f

1. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$, et étudier sa parité.
2. On souhaite étudier f au voisinage de 0 :
   (a) Donner le développement limité de f à l'ordre 2 en 0.
   (b) En déduire que f est dérivable en 0, et donner la valeur de $f'(0)$, l'équation de la tangente à la courbe de f en 0, et la position de la courbe de f relativement à cette tangente au voisinage de 0.
3. On souhaite étudier les variations de f sur $\mathbb{R}$:
   (a) Justifier que f est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$, et donner l'expression de $f'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^*$.
   (b) En déduire que f est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. On pourra commencer par exprimer le développement limité de $x \mapsto (1+x^2)\mathrm{Arctan}(x)$ à l'ordre 2 en 0.
   (c) En utilisant une intégration par parties, montrer que :
   $$\forall x \in \mathbb{R}^*,\ \int_0^x \frac{t^2}{(1+t^2)^2}\mathrm{d}t = -\frac{1}{2}x^2 f'(x).$$
   (d) En déduire, pour tout $x \in \mathbb{R}$, le signe de $f'(x)$. On justifiera en particulier que f' ne s'annule qu'en 0.
   (e) En déduire les variations de f sur $\mathbb{R}$, en précisant bien les limites.
4. (a) À l'aide de la question précédente, justifier que f réalise une bijection de $\mathbb{R}_+$ sur un ensemble J que l'on précisera. On notera g cette bijection, c'est-à-dire que :
   $$g : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \to & J \\ x & \mapsto & f(x) \end{array} \right.$$
   (b) Justifier que g^{-1} est continue sur J.
   (c) La fonction g^{-1} est-elle $\mathcal{C}^\infty$ sur J ? Si oui, le prouver. Sinon, donner le plus grand sous-ensemble de J sur laquelle elle est $\mathcal{C}^\infty$.
5. À l'aide des questions précédentes, tracer dans un même repère les courbes de f et de g^{-1}. On prendra comme unité 2 grands carreaux ou 2 cm. Et on fera bien figurer la tangente à la courbe de f en son point d'abscisse 0 ainsi que la première bissectrice.

Seconde étude de f, et application à une suite récurrente

6. On souhaite dans un premier temps étudier de manière plus précises les variations de f en contrôlant les valeurs de f'. On rappelle que le signe de f' a été déterminé en question 3 et qu'une expression de f' à l'aide d'une intégrale a été déterminée à cette même question.
   (a) Montrer que, pour tous $a, b \in \mathbb{R}$: $(a^2 + b^2) \geq 2ab$ et en déduire que :
   $$\forall t \in \mathbb{R},\ (1+t^2)^2 \geq 2t.$$

(b) Soit $x \in]0;+\infty[$:

i. Déduire de la question précédente que : $\displaystyle\int_0^x \frac{t^2}{(1+t^2)^2}\mathrm{d}t \leq \frac{1}{4}x^2$.

ii. En déduire que $|f'(x)| \leq \dfrac{1}{2}$.

(c) En déduire que : $\forall x \in \mathbb{R},\ |f'(x)| \leq \dfrac{1}{2}$.

Pour la suite de cette partie, on souhaite étudier le comportement de la suite (u_n) définie par :

$$u_0 = a \in \mathbb{R} \text{ et } \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n).$$

7. On souhaite étudier les éventuelles limites possibles pour (u_n).
   (a) Montrer que (u_n) est bornée. En déduire que, si (u_n) possède une limite, celle-ci est finie et est un point fixe de f.
   (b) Montrer que f possède un unique point fixe ℓ sur $\mathbb{R}$, et que $\ell \in \left]\dfrac{1}{\sqrt{3}};1\right[$.
   Indication : on pourra utiliser la majoration de $|f'|$ de la question précédente.
8. Déduire des questions précédentes qu'il existe deux constantes $K \in [0;1[$ (que l'on donnera explicitement) et $b \in \mathbb{R}$ (que l'on exprimera à l'aide de a et ℓ) telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ |u_n - \ell| \leq K^n b$$

puis conclure.

Une fonction définie par une intégrale

On définit pour la suite du problème l'application φ sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*,\ \varphi(x) = \frac{1}{x}\int_x^{2x} f(t)\mathrm{d}t \text{ et } \varphi(0) = 1.$$

9. Justifier que f possède une unique primitive sur $\mathbb{R}$ qui s'annule en 0. On notera F cette primitive.
10. Pour $x \neq 0$, exprimer $\varphi(x)$ à l'aide de F, puis en déduire que φ est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^*$, et que

$$\forall x \in \mathbb{R}^*,\ x\varphi'(x) + \varphi(x) = 2f(2x) - f(x)$$

11. On souhaite étudier plus finement φ au voisinage de 0.
    (a) Montrer que φ admet un développement limité à l'ordre 2 en 0, et le donner.
    Indication : on pourra commencer par exprimer le DL3 de F en 0.
    (b) En déduire que φ est continue en 0.
    (c) En déduire également que φ est dérivable en 0 : on donnera la valeur de $\varphi'(0)$, l'équation de la tangente à la courbe de φ en 0, ainsi que la position relative de cette courbe par rapport à la tangente au voisinage de 0.
12. Déduire des questions précédentes que φ est solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle

$$x^2y' + xy = \arctan(2x) - \arctan(x) \qquad (E)$$

13. Résoudre (E) sur $\mathbb{R}_+^*$ et sur $\mathbb{R}_-^*$.
14. En déduire que φ est l'unique solution sur $\mathbb{R}$ de (E).

Partie Algèbre

Rappels et notations

Dans tout le sujet, $n \geq 2$ désigne un entier naturel et E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension n. Si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on note $M^\top$ la transposée de la matrice M.

Si M est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on définit la suite des puissances de M par $M^0 = I_n$ et, pour tout entier naturel k, $M^{k+1} = MM^k$.

De même, si u est un endomorphisme de E, on définit la suite des puissances de u par $u^0 = \mathrm{Id}_E$ et, pour tout entier naturel k, $u^{k+1} = u \circ u^k$.

Une matrice M est dite **nilpotente** s'il existe un entier naturel $k \geqslant 1$ tel que $M^k = 0$. Dans ce cas, le plus petit entier naturel $k \geqslant 1$, tel que $M^k = 0$ s'appelle l'**indice de nilpotence** de M, que l'on note on note $\nu(M)$. Ainsi, $\nu(M) = p$ si et seulement si $M^p = 0$ et $M^{p-1} \neq 0$.
Soit $\mathcal{B}$ une base de E, un endomorphisme de E est nilpotent d'indice p si sa matrice dans $\mathcal{B}$ est nilpotente d'indice p.

On note $\mathcal{N}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices nilpotentes.

On note $\mathrm{Mat}(f, \mathcal{B})$ la matrice d'un endomorphisme f dans une base $\mathcal{B}$.

Exemples

1. Vérifier que les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -7 \\ 2 & 6 & -14 \\ 1 & 3 & -7 \end{pmatrix}$ et $K = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ sont nilpotentes et précisez leur indice de nilpotence (on discutera en fonction des valeurs des réels a, b et c).
2. On considère les deux matrices suivantes de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, dont les éléments sont tous nuls, à l'exception d'un seul qui est égal à 1,

$$E_{1n} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix} ; E_{n1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \vdots & & \vdots \\ \vdots & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

   Calculer les puissances des matrices E_{1n} et $E_{n,1}$, $E_{1n} + E_{n1}$, $E_{1n}E_{n1}$ et dire si ces matrices sont nilpotentes. Si oui préciser l'indice de nilpotence.
3. En déduire si l'ensemble $\mathcal{N}_n(\mathbb{R})$ des matrices nilpotentes est
   (a) un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$?
   (b) stable par produit, c'est-à-dire, le produit de deux éléments de $\mathcal{N}_n(\mathbb{R})$ est-il encore un élément de $\mathcal{N}_n(\mathbb{R})$ en général ?

Quelques propriétés des matrices nilpotentes

4. Une matrice nilpotente est-elle inversible ?
5. Justifier que si $N \in \mathcal{N}_n(\mathbb{R})$, alors la transposée $N^\top$ de N est aussi nilpotente.
6. Prouver que si M et N sont deux matrices de $\mathcal{N}_n(\mathbb{R})$ vérifiant $M \times N = N \times M$, alors
   (a) $M \times N \in \mathcal{N}_n(\mathbb{R})$

(b) $M + N \in \mathcal{N}_n(\mathbb{R})$.

7. (a) Soit $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et M une matrice semblable à N. Montrer que si N est nilpotente, M l'est aussi et $\nu(N) = \nu(M)$.

   (b) On suppose dans cette question que $N \in \mathcal{N}_3(\mathbb{R})$ d'indice de nilpotence $\nu(N) = 2$. On note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ tel que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = N$.

   i. Etablir que $\mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Ker}(f)$.

   ii. En déduire les dimensions de l'image et du noyau de f.

   iii. Prouver l'existence d'une base $\mathcal{B}'$ de $\mathbb{R}^3$ telle que $\quad \mathrm{Mat}(f, \mathcal{B}') = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

   (c) Etablir qu'une matrice N de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ est nilpotente d'indice de nilpotence égal à 2 si et seulement si N est semblable à la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Une matrice aléatoire... et nilpotente ?

Dans cette partie $(\Omega, \mathbb{P})$ désigne un espace probabilisé fini, p est un réel appartenant à l'intervalle $]0,1[$, et X_1, X_2, X_3 sont des variables aléatoires mutuellement indépendantes, suivant toutes trois la loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$ de paramètre p. On considère alors la matrice aléatoire suivante

$$N = \begin{pmatrix} X_1 & X_2 & X_3 \\ X_1 & X_2 & X_3 \\ X_1 & X_2 & X_3 \end{pmatrix} .$$

C'est une matrice aléatoire au sens où chaque coefficient est une variable aléatoire (si par exemple elle avait une ligne et deux colonnes, comme (X_1, X_2), on retrouverait un couple de variables aléatoires comme dans le cours).

8. Soit $i \in [\![1, 3]\!]$. Donner sans justifier l'espérance et la variance de X_i.
9. Quelles sont les valeurs possibles de la variable aléatoire $\mathrm{rg}(N)$? Déterminer sa loi.
10. Exprimer la variable aléatoire $\mathrm{tr}(N)$ (la trace de N) en fonction des X_i, en déduire sa loi, puis donner son espérance et sa variance, sans justification.
11. Calculer N^2 en fonction de $\mathrm{tr}(N)$. Calculer la probabilité que la matrice N appartienne à $\mathcal{N}_3(\mathbb{R})$.

Racines carrées d'une matrice nilpotente

On pose $\mathcal{B}_3 = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Pour une matrice $V \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ donnée, on dit qu'une matrice $R \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ est une racine carrée de V si $R^2 = V$.
On se propose d'étudier l'existence et les valeurs de racines carrées éventuelles de la matrice A, définie dans la question 1. On note u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à A.

12. Calculer la trace, le déterminant et le rang de u. En déduire la dimension de $\mathrm{Ker}(u)$.
13. Calculer $u(e_1)$. Montrer que ce vecteur génère $\mathrm{Im}(u)$. Montrer ensuite que $e_2 - 3e_1 \in \mathrm{Ker}(u)$ et en déduire que $(u(e_1),\ e_2 - 3e_1)$ est une base de $\mathrm{Ker}(u)$.
14. Montrer que $\mathcal{C} := (u(e_1),\ e_2 - 3e_1,\ e_1)$ est une base de $\mathbb{R}^3$, puis donner la matrice de u dans cette base.
15. Expliciter les matrices de passage qui permettent le passage entre $\mathcal{B}_3$ et $\mathcal{C}$, dans les deux sens, en donnant l'égalité de changement de bases.

16. Soit $R \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ une racine carrée R de A et ρ l'endomorphisme associé à R.
    Montrer que R commute avec A et en déduire que $\mathrm{Im}(u)$ et $\mathrm{Ker}(u)$ sont stables par R.

17. Posons $R' := \begin{pmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{pmatrix}$ la matrice de ρ dans la base $\mathcal{C}$.

    (a) En utilisant la stabilité de $\mathrm{Im}(u)$ par ρ, montrer que $\rho(\mathrm{Im}(u)) = \{0_{\mathbb{R}^3}\}$. En déduire les valeurs de a, b, c.

    (b) En utilisant la stabilité de $\mathrm{Ker}(u)$ par ρ, montrer que $\rho(\mathrm{Ker}(u)) = \mathrm{Im}(u)$. En déduire les valeurs de e et f.

    (c) En calculant $\rho^2(e_1)$ de 2 façons différentes, en déduire $\rho(e_1)$ en fonction des vecteurs de $\mathcal{C}$.

18. En déduire l'ensemble des racines carrées de A.
    On pourra considérer le lien entre R' et R par les matrices de passage.