Correction Partie Algèbre du Concours blanc 2025

Partie A - Exemples

1. On a $A^2 = 0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})}$, $\quad K^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & ac \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $K^3 = 0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})}$.
Donc les deux matrices sont nilpotentes et $\boxed{\nu(A) = 2}$ et $\boxed{\nu(K) = 3}$.

2. On a de même $\boxed{E_{1n}^2 = E_{n1}^2 = 0}$, donc ces deux matrices sont nilpotentes d'ordre 2. Aussi $E_{1n}+E_{n1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

D'où $\quad (E_{1n} + E_{n1})^{2k} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $\quad (E_{1n} + E_{n1})^{2k+1} = E_{1n} + E_{n1}$, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$.

$\boxed{\text{La matrice } E_{1n} + E_{n1} \text{ n'est donc pas nilpotente.}}$

Enfin, on se rappelle que $\quad E_{lk}E_{ij} = \delta_{ki}E_{lj}$, donc $\quad \boxed{E_{1n}E_{n1} = E_{11} \text{ n'est pas nilpotente}}$, puisque, ppour tout $n \in \mathbb{N}$, $E_{11}^n = E_{11}$.

3. (a) On a donc $E_{1n}, E_{n1} \in \mathcal{N}_n(\mathbb{R})$, mais $E_{1n} + E_{n1} \notin \mathcal{N}_n(\mathbb{R})$, donc $\boxed{\mathcal{N}_n(\mathbb{R}) \text{ n'est pas un espace vectoriel}}$.

   (b) De même, $E_{1n}, E_{n1} \in \mathcal{N}_n(\mathbb{R})$, mais $E_{1n}E_{n1} \notin \mathcal{N}_n(\mathbb{R})$, donc $\boxed{\mathcal{N}_n(\mathbb{R}) \text{ n'est pas stable par produit}}$.

Partie B - Quelques propriétés des matrices nilpotentes

4. Soit $A \in \mathcal{N}_n(\mathbb{R})$. Supposons qu'il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, tel que $AB = I_n$.
Alors on peut multiplier à droite par $A^{\nu(A)-1}$, et on obtient $\quad A^{\nu(A)}B = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})} = A^{\nu(A)-1}$, ce qui contredit le fait que $A^{\nu(A)-1} \neq 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$, par définition de $\nu(A)$.
Par l'absurde, $\boxed{A \text{ n'est donc pas inversible}}$.

5. Soit $N \in \mathcal{N}_n(\mathbb{R})$. On a $(N^\top)^{\nu(N)} = (N^{\nu(N)})^\top = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}^\top = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$, d'où $\boxed{N^\top \text{ est nilpotente}}$.
De plus, pour tout $k < \nu(N)$, on a $(N^\top)^k = (N^k)^\top \neq 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$, par définition de $\nu(N)$, donc $\boxed{\nu(N^\top) = \nu(N)}$.

6. Soient $M, N \in \mathcal{N}_n(\mathbb{R})$, telle que $MN = NM$.

   (a) Premièrement, $(MN)^{\min(\nu(M),\nu(N))} = M^{\min(\nu(M),\nu(N))}N^{\min(\nu(M),\nu(N))} = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$, car $\min(\nu(M), \nu(N)) = \nu(M)$ ou $\nu(N)$ et donc une des deux matrices $M^{\min(\nu(M),\nu(N))}$ ou $N^{\min(\nu(M),\nu(N))}$ est nulle.
   Donc $\boxed{MN \text{ est nilpotente d'indice de nilpotence inférieur à } \min(\nu(M), \nu(N))}$.

   (b) Deuxièmement, comme M et N comutent, d'après le binôme de Newton,

$$(M + N)^{\nu(M)+\nu(N)-1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{\nu(M) + \nu(N)}{k} M^k N^{\nu(M)+\nu(N)-k-1} \ .$$

   Or $\left|\begin{array}{l} \text{Si } k \geqslant \nu(M), \text{ alors } M^k = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}, \\ \text{Si } k < \nu(M), \text{ alors } \nu(M) + \nu(N) - k - 1 \geqslant \nu(N), \text{ donc } N^{\nu(M)+\nu(N)-k} = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}. \end{array}\right.$
   Donc, tous les termes $\binom{\nu(M)+\nu(N)}{k} M^k N^{\nu(M)+\nu(N)-k}$ de la somme précédente sont nuls, d'où $(M+N)^{\nu(M)+\nu(N)} = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$, ce qui prouve la $\boxed{\text{nilpotence de } M + N \text{ et que } \nu(M) + \nu(N) - 1 \geqslant \nu(M + N)}$.

7. (a) Soient $N \in \mathcal{N}_n(\mathbb{R})$ et M semblable à N. Alors il existe une matrice $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, telle que $M = PNP^{-1}$. On a donc, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$M^k = \left(PNP^{-1}\right)^k = PN^kP^{-1} \begin{cases} = 0 & \text{si } k \geqslant \nu(N) \ , \\ \neq 0 & \text{si } k < \nu(N) \ , \end{cases}$$

   par définition de $\nu(N)$. Donc $\boxed{M \text{ est nilpotente et } \nu(N) = \nu(M)}$.

(b) i. Soit $f(x) \in \mathrm{Im}(f)$, où $x \in \mathbb{R}^3$. Alors $f\big(f(x)\big) = f^2(x) = 0_{\mathbb{R}^3}$, car f est nilpotent d'indice 2. D'où $\boxed{\mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Ker}(f)}$.

ii. D'après le théorème du rang, $3 = \dim \mathbb{R}^3 = \dim \mathrm{Ker}(f) + \dim \mathrm{Im}(f)$. Mais d'après la question précédente, $\dim \mathrm{Ker}(f) \geqslant \dim \mathrm{Im}(f)$, donc les seules possibilités sont $(\dim \mathrm{Ker}(f), \dim \mathrm{Im}(f)) \in \{(3,0);(2,1)\}$. Le cas $\dim \mathrm{Ker}(f) = 3$, implique que $\mathrm{Ker}(f) = \mathbb{R}^3$ et donc que $f = 0$, ce qui est absurde parce que $\nu(f) = 2$.

Il ne reste plus que $\boxed{(\dim \mathrm{Ker}(f), \dim \mathrm{Im}(f)) = (2,1)}$.

iii. Prenons un vecteur $x \in E$. Alors $f(x) \in \mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Ker}(f)$. Complétons $\{f(x)\}$ en une base $\{u(x), y\}$ de $\mathrm{Ker}(f)$. Posons alors $\boxed{\mathcal{B}' = (f(x), y, x)}$. On a alors

$$\boxed{\mathrm{Mat}(f, \mathcal{B}') = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.}$$

(c) Il suffit de montrer la réciproque de la question précédente.

Si N est semblable à $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, alors il existe $p \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, tel que $N = P \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1}$.

On obtient que $N^2 = P \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^2 P^{-1}$, et donc que $\boxed{N^2 = 0}$ et N est de rang 1, car le produit par des matrices inversibles représente des opérations sur les lignes ou les colonnes, et ne modifie donc pas le rang. Donc $\boxed{N \neq 0}$.

Ce qui prouve bien que $\boxed{N \text{ est nilpotente d'indice de nilpotence } 2}$.

Partie C - Une matrice aléatoire... et nilpotente ?

(8) Comme $X_i \sim \mathcal{B}(p)$, alors $\boxed{X_i(\Omega) = \{0,1\}}$, $\boxed{\mathbb{E}(X_i) = p}$ et $\boxed{\mathbb{V}(X_i) = p(1-p)}$.

(9) On a $N = \begin{pmatrix} X_1 & X_2 & X_3 \\ X_1 & X_2 & X_3 \\ X_1 & X_2 & X_3 \end{pmatrix}$. Comme les trois lignes sont égales, alors $\boxed{\mathrm{rg}(N) \in \{0,1\}}$. On a $\mathbb{P}\big(\mathrm{rg}(N) = 1\big) = \mathbb{P}\big((X_1 = 1) \cup (X_2 = 1) \cup (X_3 = 1)\big) = 1 - \mathbb{P}\big((X_1 = 0) \cap (X_2 = 0) \cap (X_3 = 0)\big)$.
Or les variables X_i sont indépendantes, donc $\mathbb{P}\big(\mathrm{rg}(N) = 1\big) = 1 - \mathbb{P}(X_1 = 0)\ \mathbb{P}(X_2 = 0)\ \mathbb{P}(X_3 = 0) = \boxed{1 - p^3}$.

(10) On a trace $M = X_1 + X_2 + X_3$. C'est la somme de trois variable aléatoires de Bernoulli de paramètre p, indépendantes, donc $\boxed{\text{trace } M \sim \mathcal{B}(3,p)}$.
On a donc $\mathbb{E}(\text{trace } M) = 3p$ et $\mathbb{V}(\text{trace } M) = 3p(1-p)$.

(11) On a $N^2 = \mathrm{trace}(N)\ N$. Donc $N \in \mathcal{N}_3(\mathbb{R})$, si et seulement si $\mathrm{trace}(N) = 0$.

$$\mathbb{P}\big(N \in \mathcal{N}_3(\mathbb{R})\big) = \mathbb{P}\big(\mathrm{trace}(M) = 0\big) = \boxed{(1-p)^3} ,$$

d'après la question 10.

Partie D - Racines carrées d'une matrice nilpotente

(12) $\mathrm{trace} A = 0$, $\det A = 0$, et $\mathrm{rg}(A) = 1$, car les trois colonnes de A sont proportionnelles et non nulles. D'après le théorème du rang, $\dim \mathrm{Ker}(u) = \dim \mathbb{R}^3 - \mathrm{rg}(u) = 3 - 1 = \boxed{2}$.

(13) On a $u(e_1) = (1,2,1)$ et Im u est de dimension 1, donc $\boxed{(1,2,1) \text{ génère Im } u}$.
De plus, $u(e_2 - 3e_1) = u(-3,1,0) = (0,0,0)$ donc $e_2 - 3e_1 = (-3,1,0) \in$ Ker u. De plus, comme la troisième coordonnée de $(-3,1,0)$ est nulle et pas celle de $u(e_1)$, il ne sont pas colinéaires. On en déduit qu'ils forment une famille libre de Ker u.
Or Ker u est de dimension 2, donc la famille $\boxed{\{u(e_1), e_2 - 3e_1\} \text{ est libre maximale}}$ et est donc une base de Ker u.

(14) On doit juste vérifier que e_1 n'est pas dans le plan engendré par $\{u(e_1), e_2 - 3e_1\}$. Si c'était le cas, il existerait une combinaison linéaire de ces deux vecteurs qui soit e_1. Comme les deux dernières coordonnées de e_1 sont nulles, cela impliquerait que les deux scalaires soient nuls, ce qui est absurde, car e_1 n'est pas le vecteur nul. Donc $(u(e_1), e_2 - 3e_1, e_1)$

est une famille libre de 3 vecteurs dans $\mathbb{R}^3$ de dimension 3, donc c'est une base de $\mathbb{R}^3$.
De plus,

$$u\big(u(e_1)\big) = 0_{\mathbb{R}^3}\ , \qquad u\big(e_2 - 3e_1\big) = 0_{\mathbb{R}^3}\ ,$$

donc $\boxed{\mathrm{Mat}(u, \mathcal{C}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}$.

15) On a

$$\boxed{P_{\mathcal{C}\to\mathcal{B}_3} := \mathrm{Mat}(\mathrm{Id}, \mathcal{C}, \mathcal{B}_3) = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.} \quad \text{et}$$

$$\boxed{P_{\mathcal{B}_3\to\mathcal{C}} = P_{\mathcal{C}\to\mathcal{B}_3}^{-1} = \frac{1}{\det P_{\mathcal{C}\to\mathcal{B}_3}}\ (\mathrm{com} P_{\mathcal{C}\to\mathcal{B}_3})^\top = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & -7 \end{pmatrix}}\ .$$

On a l'identité $\boxed{\mathrm{Mat}(u, \mathcal{C}) = P_{\mathcal{B}_3\to\mathcal{C}}\ A\ P_{\mathcal{C}\to\mathcal{B}_3}}$.

16) On a $\quad RA = R\ R^2 = R^3 = R^2\ R = AR,\quad$ donc A et R commutent. On a donc $\boxed{\rho\circ u = u\circ\rho}$.
De plus, si $x \in \mathrm{Ker}\ u,\quad u\circ\rho(x) = \rho\circ u(x) = 0_{\mathbb{R}_3}$, donc $\rho(x) \in \mathrm{Ker}(u)$
et si $u(y) \in \mathrm{Im}\ u$, $\rho\big(u(y)\big) = \rho\circ u(y) = u\circ\rho(y) = u\big(\rho(y)\big) \in \mathrm{Im}\ u$.
$\boxed{\text{Donc Im } u \text{ et Ker } u \text{ sont stables par } R}$.

17) a) Comme Im u est stable par ρ, alors $\quad \rho\big(u(e_1)\big) = \lambda u(e_1)$, pour un certain $\lambda \in \mathbb{R}$. Donc $0_{\mathbb{R}^3} = u^2(e_1) = \rho^2(u(e_1)) = \lambda^2 u(e_1)$. Donc $\lambda = 0$ et donc $\boxed{a = b = c = 0}$.

b) Posons $v = e_2 - 3e_1$. Ker $u = \mathrm{Vect}\,(u(e_1), v)$ est stable par ρ donc $u\,(v) \in \mathrm{Vect}\,(u(e_1), v)$ et en lisant les coefficient dans R', on a $\rho\,(v) = du(e_1) + ev$. Alors

$$\rho^2\,(v) = d\rho\,(u(e_1)) + e\rho\,(v) = e\rho\,(v) = deu(e_1) + e^2 v = 0$$

Puisque $(u(e_1), v)$ est libre, $de = e^2 = 0$ donc $e = 0$ et $\boxed{\rho\,(v) = du(e_1)}$.

c) En utilisant les coefficient de R', on a $\quad \rho\,(e_1) = gu(e_1) + hv + i\ e_1$. Alors

$$\rho^2\,(e_1) = u(e_1) = i\rho\,(e_1) + g\rho\,(u(e_1)) + h\rho\,(v) = i\,(ie_1 + gu(e_1) + hv) + hdu(e_1) = i^2 e_1 + (ig + hd)u(e_1) + ihv.$$

Donc

$$i^2 e_1 + (ig + hd - 1)u(e_1) + ihv = 0$$

La famille $(e_1, u(e_1), v)$ est libre donc ces trois coefficients sont nuls.

$$\left\{\begin{array}{rcl} i^2 & = & 0 \\ ig + hd - 1 & = & 0 \\ ih & = & 0 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{rcl} i & = & 0 \\ hd & = & 1 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \boxed{\text{i=0}} \\ \boxed{\text{h=1/d}} \end{array}\right., \text{ si } d \neq 0$$

18) On en déduit finalement qu'il existe $d \neq 0$ et $g \in \mathbb{R}$ tels que

$$\left\{\begin{array}{l} \rho\,(u(e_1)) = 0 \\ \rho\,(v) = du(e_1) \\ \rho\,(e_1) = gu(e_1) + d^{-1}v \end{array}\right. \quad\Rightarrow\quad R' = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\rho) = \begin{pmatrix} 0 & d & g \\ 0 & 0 & d^{-1} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Donc l'ensemble des racines carrées de A est

$$\boxed{\left\{ P \begin{pmatrix} 0 & d & g \\ 0 & 0 & d^{-1} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1} \ \middle|\ d \in \mathbb{R}^*,\ g \in \mathbb{R} \right\}}\ .$$

où $P = P_{\mathcal{C}\to B_3}$ est la matrice de passage définie à la question 15.