Corrigé du DS n°11 du 04/06/2025

Correction.

1. Les fonctions Arctan (fonction usuelle) et $x\mapsto x$ (fonction polynomiale) sont continues sur $\mathbb{R}$. La fonction $x\mapsto x$ ne s'annulant qu'en 0, cela assure comme quotient de fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas que f est continue sur $\mathbb{R}^*$.
   Reste la continuité en 0. Mais pour $x\neq 0$, on a :
   $$f(x)=\frac{\mathrm{Arctan}(x)}{x}=\frac{\mathrm{Arctan}(x)-\mathrm{Arctan}(0)}{x-0}$$
   qui tend donc vers $\mathrm{Arctan}'(0)=1$ quand x tend vers 0. Ceci assure la continuité de f en 0.
   Donc f est continue sur $\mathbb{R}$.
   De plus, pour $x\neq 0$, par imparité de Arctan et de $x\mapsto x$, on a :
   $$f(-x)=\frac{\mathrm{Arctan}(-x)}{-x}=\frac{-\mathrm{Arctan}(x)}{-x}=f(x)$$
   ce qui assure que f est paire (la valeur en 0 n'ayant pas d'importance pour une fonction paire, on ne s'y est pas intéressé).
2. (a) On a le développement de Arctan en 0 suivant (par exemple en primitivant terme à terme celui de $\frac{1}{1+x^2}$) :
   $$\mathrm{Arctan}(x)\underset{x\to 0}{=}x-\frac{x^3}{3}+\mathrm{o}(x^3)$$
   et par quotient :
   $$f(x)=\frac{\mathrm{Arctan}(x)}{x}\underset{x\to 0}{=}1-\frac{x^2}{3}+\mathrm{o}(x^2)$$
   et la formule est valable en 0 comme $f(0)=1$.

   (b) Par troncature, f admet un $DL1(0)$, donc est dérivable en 0. Le coefficient de degré 1 étant nul, on a : $f'(0)=0$, et la tangente à la courbe de f en 0 a pour équation $y=1$.
   De plus, on a :
   $$f(x)-1\underset{x\to 0}{=}-\frac{x^2}{3}+\mathrm{o}(x^2)\underset{x\to 0}{\sim}-\frac{x^2}{3}\leq 0$$
   donc la courbe de f est sous sa tangente en 0 au voisinage de 0.
3. (a) Les fonctions Arctan (fonction usuelle) et $x\mapsto x$ (fonction polynomiale) sont $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. Comme $x\mapsto x$ ne s'annule qu'en 0, alors f est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$ comme quotient de fonction de classe $\mathcal{C}^1$ dont le dénominateur ne s'annule pas. Par dérivée d'un quotient, on a :
   $$\forall x\in\mathbb{R}^*,\ f'(x)=\frac{\mathrm{Arctan}'(x)x-\mathrm{Arctan}(x)}{x^2}=\frac{\frac{x}{1+x^2}-\mathrm{Arctan}(x)}{x^2}=\frac{x-(1+x^2)\mathrm{Arctan}(x)}{(1+x^2)x^2}.$$

   (b) On a déjà que f est dérivable sur $\mathbb{R}$, que f est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$ (avec l'expression ci-dessus de f' sur $\mathbb{R}^*$) et que $f'(0)=0$. Il reste juste à prouver que f' est continue en 0, c'est-à-dire que :
   $$\lim_{x\to 0}\frac{x-(1+x^2)\mathrm{Arctan}(x)}{(1+x^2)x^2}=0.$$
   Mais on a le développement limité suivant (par développement usuel et produit) :
   $$(1+x^2)\mathrm{Arctan}(x)\underset{x\to 0}{=}(1+x^2)\left(x+\mathrm{o}(x^2)\right)\underset{x\to 0}{=}x+\mathrm{o}(x^2)$$
   et en réinjectant :
   $$f'(x)=\frac{x-(1+x^2)\mathrm{Arctan}(x)}{(1+x^2)x^2}\underset{x\to 0}{=}\frac{\mathrm{o}(x^2)}{x^2+\mathrm{o}(x^2)}\underset{x\to 0}{=}\frac{\mathrm{o}(1)}{1+\mathrm{o}(1)}\underset{x\to 0}{=}\mathrm{o}(1)\underset{x\to 0}{\to}0.$$
   Ce qui prouve le résultat voulu.
   Donc f est bien de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ entier.

   (c) On écrit :
   $$\frac{t^2}{(1+t^2)^2}=\frac{1}{2}\frac{2t}{(1+t^2)^2}\cdot t$$
   et on procède par intégration par parties en primitivant $t\mapsto\frac{2t}{(1+t^2)^2}$ (ce qui donne $t\mapsto -\frac{1}{(1+t^2)}$) et en dérivant $t\mapsto t$ (ce qui donne $t\mapsto 1$). Les fonctions $t\mapsto -\frac{1}{(1+t^2)}$ et $t\mapsto t$ étant $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, l'intégration par parties et licite, et donne :
   $$\int_0^x\frac{t^2}{(1+t^2)^2}\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\left[-\frac{t}{1+t^2}\right]_0^x+\frac{1}{2}\int_0^x\frac{1}{1+t^2}\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\left(-\frac{x}{1+x^2}+\mathrm{Arctan}(x)\right)$$
   ce qui est bien la formule voulue, en notant que pour $x\in\mathbb{R}^*$:
   $$-\frac{1}{2}x^2f'(x)=-\frac{1}{2}\frac{x-(1+x^2)\mathrm{Arctan}(x)}{(1+x^2)}=\frac{1}{2}\left(-\frac{x}{1+x^2}+\mathrm{Arctan}(x)\right).$$

   (d) On distingue suivant le signe de x :
   - si $x=0$: on a déjà vu que $f'(0)=0$, qui est bien nul ;
   - si $x>0$: la fonction $t\mapsto\frac{t^2}{(1+t^2)^2}$ est positive, continue, et non identiquement sur le segment $[0;x]$. Ceci assure que :
     $$\int_0^x\frac{t^2}{(1+t^2)^2}\mathrm{d}t>0$$
     et en divisant cette inégalité par $-\frac{1}{2}x^2<0$, on déduit que pour un tel x : $f'(x)<0$ (en particulier f' ne s'annule pas sur $\mathbb{R}_+^*$;
   - si $x<0$: on pourrait faire le même raisonnement, mais on peut aussi invoquer que, comme f est paire, alors f' est impaire, ce qui assure que : $f'(x)=-f'(-x)>0$ (et ainsi f' ne s'annule pas non plus sur $\mathbb{R}_-^*$).

   (e) Finalement, on déduit les variations suivantes de f sur $\mathbb{R}$:

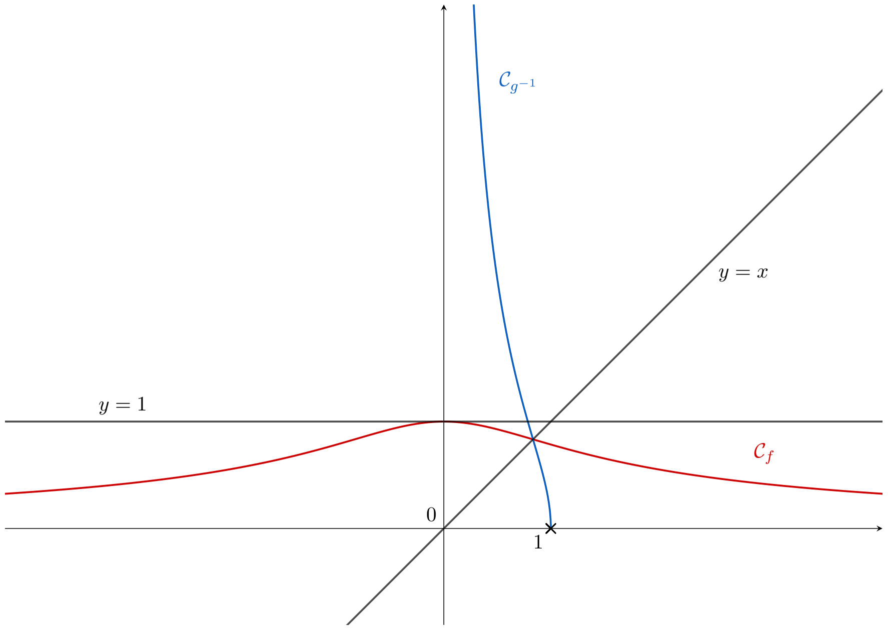
x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

   où les limites se calculent directement par quotient (pas de forme indéterminée) en notant que Arctan tend vers $\pm\pi/2$ en $\pm\infty$.
4. (a) La fonction f est continue sur $\mathbb{R}_+$.
   Sa dérivée est négative sur $\mathbb{R}_+$, ne s'annulant qu'en 0, f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+$.
   On a $f(0)=1$ et $\lim_{x\to+\infty}f(x)=0$.
   Par théorème de la bijection monotone : f réalise une bijection (strictement décroissante) de $\mathbb{R}_+$ dans $]0;1]$.

(b) La continuité de f (donc de g) assure, par théorème de la bijection monotone, la continuité de g^{-1}.

(c) La fonction f étant $\mathcal{C}^\infty$, la fonction g l'est également. De plus, la fonction f' ne s'annule qu'en 0 : ainsi g^{-1} est $\mathcal{C}^\infty$ partout sauf en $g(0) = 1$.
Et donc g^{-1} est $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0;1[$.

5. On a les graphes suivants :



6. (a) Pour $a, b \in \mathbb{R}$, on a :
$$0 \leq (a-b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab$$
et en ajoutant $2ab$ à chaque membre on a la première inégalité.
On l'applique à $a = 1$ et $b = t \in \mathbb{R}$, ce qui donne :
$$\forall t \in \mathbb{R},\ (1+t^2) \geq 2t$$
mais, pour $t \in \mathbb{R}$, on a : $1 + t^2 \geq 1 > 0$. Et par produit par $(1+t^2) > 0$, il vient :
$$\forall t \in \mathbb{R},\ (1+t^2)^2 \geq (1+t^2) \geq 2t$$
ce qui donne l'inégalité demandée.

(b) Soit $x \in]0; +\infty[$:

i. Avec l'inégalité précédente, on déduit :
$$\forall t \in [0;x],\ \frac{t^2}{(1+t^2)^2} \leq \frac{t^2}{2t} = \frac{t}{2}$$
et en intégrant cette inégalité sur $[0;x]$, il vient :
$$\int_0^x \frac{t^2}{(1+t^2)^2}\mathrm{d}t \leq \int_0^x \frac{t}{2}\mathrm{d}t = \frac{x^2}{4}$$
qui est l'inégalité demandée.

ii. On reprend l'expression de f' de la question 3. Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$:
$$f'(x) = -\frac{2}{x^2}\int_0^x \frac{t^2}{(1+t^2)^2}\mathrm{d}t \geq -\frac{2}{x^2}\frac{x^2}{4} = -\frac{1}{2}$$
et comme on a le signe de f' sur $\mathbb{R}_+$, on a :
$$0 \geq f'(x) \geq -\frac{1}{2}$$
ce qui donne bien $|f'(x)| \leq \frac{1}{2}$ en passant à la valeur absolue.

(c) Le cas $x > 0$ vient d'être traité.
Le cas $x = 0$ est immédiat, comme : $|f'(0)| = 0 \leq \frac{1}{2}$.
Pour le cas $x < 0$, on utilise que f' est impaire :
$$|f'(x)| = |-f'(-x)| = |f'(\underbrace{-x}_{\in\mathbb{R}_+^*})| \leq \frac{1}{2}$$
ce qui prouve le résultat demandé.

7. (a) Du fait des variations de f, on déduit que f est bornée (étant à valeurs dans $]0;1]$).
On déduit que (u_n) est bornée à partir du rang 1 donc bornée.
En tant que suite bornée, la suite (u_n) ne peut tendre vers $\pm\infty$: sa limite, si elle existe, est nécessairement finie.
Comme pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $u_{n+1} = f(u_n)$, et que f est continue sur $\mathbb{R}$ (et donc a fortiori en la limite finie de (u_n), sous réserve d'existence), si (u_n) tend vers une limite, celle-ci est finie et est un point fixe de f.

(b) Considérons $\varphi = f - \mathrm{id} : x \mapsto f(x) - x$.
Par combinaison linéaire, φ est dérivable sur $\mathbb{R}$, avec : $\varphi' : x \mapsto f'(x) - 1$.
Mais on a également $|f'| \leq \frac{1}{2}$. Et donc :
$$\forall x \in \mathbb{R},\ -\frac{1}{2} \leq f'(x) \leq \frac{1}{2}$$
puis :
$$\forall x \in \mathbb{R},\ -\frac{3}{2} \leq \varphi'(x) \leq -\frac{1}{2} < 0$$
donc φ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$. Elle s'annule donc au plus une fois sur $\mathbb{R}$.
Mais on a également :
$$\varphi\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) - \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}\pi}{6} - \frac{2\sqrt{3}}{6} > 0 \text{ et } \varphi(1) = f(1) - 1 = \frac{\pi}{4} - 1 < 0$$
(en utilisant que $2 < \pi < 4$). Comme φ est continue sur $\left]\frac{1}{\sqrt{3}};1\right[$ et strictement décroissante sur cet intervalle, et que $0 \in \left]\varphi(1);\varphi\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right[$, on déduit par théorème de la bijection monotone que 0 possède un unique antécédent par φ dans $\left]\frac{1}{\sqrt{3}};1\right[$.
Et finalement, l'unique point d'annulation $\ell \in \left]\frac{1}{\sqrt{3}};1\right[$ de φ sur $\mathbb{R}$ est l'unique point fixe de f sur $\mathbb{R}$.

8. Comme $|f'| \leq 1/2$, par inégalité des accroissements finis :
$$\forall x, y \in \mathbb{R},\ |f(x) - f(y)| \leq \frac{1}{2}|x-y|.$$

Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ |u_n - \ell| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |a - \ell|$$

c'est-à-dire que $K = 1/2$ et $b = |a - \ell|$ conviennent :

- Initialisation : pour $n = 0$, on a directement :

$$|u_0 - \ell| \leq K^0 b$$

(c'est même une égalité) ;

- Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $|u_n - \ell| \leq K^n b$. Par inégalité des accroissements finis, on a :

$$|u_{n+1} - \ell| = |f(u_n) - f(\ell)| \leq K|u_n - \ell|$$

et par hypothèse de récurrence, on a donc :

$$|u_{n+1} - \ell| \overset{HR}{\leq} KK^n b = K^{n+1} b$$

ce qui prouve l'hérédité.

D'où le résultat par récurrence.
Comme $K \in [0; 1[$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} K^n = 0$.
Et par encadrement, on a : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \ell$.
Et ainsi, peu importe la valeur de u_0, la suite (u_n) converge vers ℓ, l'unique point fixe de f sur $\mathbb{R}$.

9. La fonction f étant continue sur l'intervalle $\mathbb{R}$, par théorème fondamental de l'analyse, elle possède une unique primitive qui s'annule en 0.

10. On a directement l'expression intégrale :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*,\ \varphi(x) = \frac{1}{x}\int_x^{2x} f(t)\mathrm{d}t = \frac{F(2x) - F(x)}{x}.$$

La fonction f est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^*$, comme quotient de telles fonctions dont le dénominateur de s'annule pas. Par primitivation, la fonction F est également $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^*$.
Par composée avec des fonctions affines, et comme combinaison linéaire de fonctions C^∞, la fonction $x \mapsto F(2x) - F(x)$ est également $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^*$.
Et par quotient par la fonction $x \mapsto x$, de classe $\mathcal{C}^\infty$ ne s'annulant pas sur $\mathbb{R}^*$, on déduit que φ est bien de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^*$.
Par dérivée de composée, combinaison linéaire, et quotient, on a :

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R}^*,\ \varphi'(x) &= \frac{(2F'(2x) - F'(x))x - (F(2x) - F(x))}{x^2} \\ &= \frac{2f(2x) - f(x)}{x} - \frac{F(2x) - F(x)}{x^2} \\ &= \frac{2f(2x) - f(x)}{x} - \frac{\varphi(x)}{x}\end{aligned}$$

ce qui donne bien l'égalité demandée pour $\varphi(x)$ et $\varphi'(x)$ dans l'énoncé.

11. (a) La fonction F est l'unique primitive de f qui s'annule en 0. Or, on a le développement limité suivant pour f :

$$f(x) \underset{x \to 0}{=} 1 - \frac{x^2}{3} + \mathrm{o}(x^2)$$

et par primitivation terme à terme d'un développement limité :

$$F(x) \underset{x \to 0}{=} \underbrace{F(0)}_{=0} + x - \frac{x^3}{9} + \mathrm{o}(x^3).$$

On déduit également :

$$F(2x) \underset{x \to 0}{=} 2x - \frac{8}{9}x^3 + \mathrm{o}(x^3)$$

et finalement :

$$\varphi(x) \underset{x \to 0}{=} \frac{x - \frac{7}{9}x^3 + \mathrm{o}(x^3)}{x} = 1 - \frac{7}{9}x^2 + \mathrm{o}(x^2)$$

et la même formule est valable en 0 car $\varphi(0) = 1$.

(b) En particulier φ admet donc le DL0 suivant en 0 : $\varphi(x) \underset{x \to 0}{=} 1 + \mathrm{o}(1)$. Donc est continue en 0.

(c) Le même raisonnement qu'à la question 2)b) assure que que : φ est dérivable en 0, avec $\varphi'(0) = 0$, sa tangente en 0 est d'équation $y = 1$, et la courbe de φ est sous sa tangente au voisinage de 0.

12. La fonction φ est dérivable sur $\mathbb{R}$, et pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a :

$$x^2\varphi'(x) + x\varphi(x) = 2xf(2x) - xf(x) = \mathrm{Arctan}(2x) - \mathrm{Arctan}(x)$$

donc φ est bien solution de (E) sur $\mathbb{R}$.

13. Comme φ est solution de (E), on possède déjà une solution particulière (sur $\mathbb{R}_+^*$ ou sur $\mathbb{R}_-^*$). Reste à résoudre l'équation homogène :

$$(E_0) : x^2y' + xy = 0.$$

dont les solutions sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$ forment respectivement les ensembles :

$$S_+^0 = \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{\lambda}{x} \end{array} \middle| \lambda \in \mathbb{R} \right\} \text{ et } S_-^0 = \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_-^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{\mu}{x} \end{array} \middle| \mu \in \mathbb{R} \right\}.$$

Et ainsi par théorème de structure, les solutions de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$ et sur $\mathbb{R}_-^*$ forment respectivement les ensembles :

$$S_+ = \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \varphi(x) + \frac{\lambda}{x} \end{array} \middle| \lambda \in \mathbb{R} \right\} \text{ et } S_- = \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_-^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \varphi(x) + \frac{\mu}{x} \end{array} \middle| \mu \in \mathbb{R} \right\}.$$

14. On cherche à recoller les solutions sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$ pour former des solutions sur $\mathbb{R}$. Mais pour $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ on a :

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\lambda}{x} = \begin{cases} +\infty & \text{si} \quad \lambda > 0 \\ 0 & \text{si} \quad \lambda = 0 \\ -\infty & \text{si} \quad \lambda < 0 \end{cases} \text{ et } \lim_{x \to 0^-} \frac{\mu}{x} = \begin{cases} -\infty & \text{si} \quad \mu > 0 \\ 0 & \text{si} \quad \mu = 0 \\ +\infty & \text{si} \quad \mu < 0 \end{cases}$$

et donc le seul recollement continu possible est φ.
Comme on a vu que φ est solution de (E) sur $\mathbb{R}$, cela conclut que c'est l'unique solution de (E) sur $\mathbb{R}$.