Concours blanc du 05/06/2024

Durée : 4h00.

Ce concours blanc est constitué de de **deux parties indépendantes notées chacune sur 10 points**. Les candidats répondront sur deux copies **indépendantes**, chacune correspondant à une partie.

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte. Les candidats sont invités à encadrer les résultats de leurs calculs. Ils pourront admettre et utiliser le résultat d'une question non résolue s'ils l'indiquent clairement sur la copie. Il convient en particulier de rappeler avec précision les **références** des questions abordées.

Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Exercice 1. Algèbre

On rappelle le théorème-définition de la *division euclidienne* : pour tout $A \in \mathbb{C}[X]$ et $B \in \mathbb{C}[X]$ non-nul, il existe un unique couple $(Q, R) \in \mathbb{C}[X]^2$ tel que

$$\begin{cases} A = BQ + R \\ \deg(R) < \deg(B) \end{cases}$$

Q et R s'appellent respectivement le *quotient* et le *reste* de la division euclidienne de A par B.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $B \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme unitaire (c'est-à-dire de coefficient dominant égal à 1) de degré n et $A \in \mathbb{C}[X]$. On se place dans l'espace vectoriel $E = \mathbb{C}_{n-1}[X]$.

Préliminaire - Calculs « modulo B »

Pour tout $P \in \mathbb{C}[X]$, on note $\langle P \rangle$ le reste de la division euclidienne de P par B.

1. Soit $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ et $P, Q \in \mathbb{C}[X]$. Montrer les propriétés suivantes :
   (a) $\langle \lambda P + \mu Q \rangle = \lambda \langle P \rangle + \mu \langle Q \rangle$
   (b) Si $P \in E$, alors $\langle P \rangle = P$.
   (c) $\langle BQ \rangle = 0$, et réciproquement, si $\langle P \rangle = 0$, alors B divise P.

On note, pour tout $P \in E$:

$$f_A(P) = \langle AP \rangle$$

Autrement dit, $f_A(P)$ est le reste de la division euclidienne de AP par B.

2. Justifier que f_A définit un endomorphisme de E.

Ce problème a pour but d'étudier l'endomorphisme f_A (matrice, bijectivité, déterminant) dans diverses situations.

Partie I - Cas où B est du type $B = (X - \beta)^n$

Soit $\beta \in \mathbb{C}$. Dans toute cette partie, on suppose que $B = (X - \beta)^n$.

3. Justifier que la famille $\mathcal{T} = (1, (X - \beta), (X - \beta)^2, \dots, (X - \beta)^{n-1})$ est une base de E.
4. Rappeller la formule de Taylor pour les polynômes.
5. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on note $a_k = \frac{A^{(k)}(\beta)}{k!}$. Montrer que la matrice de f_A dans la base $\mathcal{T}$ est :

$$\begin{pmatrix} a_0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ a_1 & a_0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & a_1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_{n-2} & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ a_{n-1} & a_{n-2} & \dots & a_1 & a_0 \end{pmatrix}$$

6. En déduire une condition nécessaire et suffisante simple portant sur A pour que f_A soit bijectif.

Partie II - Cas où B est scindé à racines simples

Dans cette question, on suppose que B est scindé à racines simples, et on note $\beta_1, \dots, \beta_n \in \mathbb{C}$ ses racines (distinctes, donc).

7. Justifier l'existence d'une famille $\mathcal{L} = (L_1, \dots, L_n)$ de polynômes de E tels que pour tout $i \in [[1, n]]$:

$$\forall k \in [[1, n]] \setminus \{i\}, \ L_i(\beta_k) = 0 \ \text{ et } \ L_i(\beta_i) = 1$$

8. Justifier que $\mathcal{L}$ est une base de E, et montrer que les coordonnées d'un polynôme $P \in E$ valent $(P(\beta_1), \dots, P(\beta_n))$.
9. A l'aide de la question précédente et en revenant à la définition de la division euclidienne, montrer pour tout $i \in [\![1, n]\!]$:
$$f_A(L_i) = A(\beta_i) L_i$$
10. En déduire la matrice de f_A dans la base $\mathcal{L}$, puis la formule
$$\det(f_A) = \prod_{i=1}^{n} A(\beta_i)$$
et expliquer à quelle condition f_A est bijectif.
11. Justifier que pour tout $P \in E$:
$$f_A(P) = \sum_{i=1}^{n} (AP)(\beta_i) L_i$$

Partie III - Application au calcul du déterminant des matrices circulantes

Soit $c_0, c_1, \dots, c_{n-1} \in \mathbb{C}$, et C la matrice suivante (appelée matrice circulante) :

$$C = \begin{pmatrix} c_0 & c_{n-1} & c_{n-2} & \dots & c_1 \\ c_1 & c_0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & c_1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ c_{n-2} & \vdots & \ddots & \ddots & c_{n-1} \\ c_{n-1} & c_{n-2} & \dots & c_1 & c_0 \end{pmatrix}$$

On pose $A = c_0 + c_1 X + \dots + c_{n-1} X^{n-1}$. Dans cette partie, le polynôme B vaut $B = X^n - 1$.

12. Montrer que pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, $\langle X^{n+k} \rangle = X^k$.
13. En déduire que la matrice de f_A dans la base canonique de E vaut C.
14. En déduire le déterminant de C. On l'exprimera en fonction de valeurs de A et de racines de l'unité.

Partie IV - bijectivité de f_A dans le cas général

On revient au cas général d'un polynôme $B \in \mathbb{C}[X]$ unitaire de degré n. On souhaite montrer pour tout $A \in \mathbb{C}[X]$ l'équivalence :

$$f_A \text{ est bijectif} \iff \text{A et B n'ont aucune racine en commun}$$

15. On suppose que A et B n'ont aucune racine en commun.
    (a) Montrer que pour tout $P \in \operatorname{Ker}(f_A)$, B divise P.
    (b) En déduire que f_A est bijectif.
16. Supposons qu'il existe $\alpha \in \mathbb{C}$ tel que $A(\alpha) = B(\alpha) = 0$. On note Q_A et Q_B les polynômes tels que $A = (X - \alpha) Q_A$ et $B = (X - \alpha) Q_B$.
    (a) Montrer que $f_A(Q_B) = 0$.
    (b) Conclure.

Partie V - déterminant de f_A dans le cas général

Soit $B \in \mathbb{C}[X]$ unitaire de degré n. Soit $A \in \mathbb{C}[X]$, non nul. On note m son degré, λ son coefficient dominant, $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ ses racines, et $m_1, \dots, m_r$ leurs multiplicités respectives.

17. Montrer que pour tout $A_1, A_2 \in \mathbb{C}[X]$, $f_{A_1A_2} = f_{A_1} \circ f_{A_2}$.
18. Soit $\alpha \in \mathbb{C}$. En utilisant la base $\left((X-\alpha)^k\right)_{k\in[[0,n-1]]}$ montrer :

$$\det(f_{(X-\alpha)}) = (-1)^n B(\alpha)$$

19. Déduire des deux questions précédentes :

$$\det(f_A) = \lambda^n (-1)^{mn} \prod_{i=1}^{r} B(\alpha_i)^{m_i}$$

20. On note $\beta_1, \ldots, \beta_q$ les racines de B et $n_1, \ldots, n_q$ leurs multiplicités. Déduire de la question précédente :

$$\det(f_A) = \prod_{j=1}^{q} A(\beta_j)^{n_j}$$

Partie VI - l'ensemble des f_A, où $A \in \mathbb{C}[X]$

Soit $B \in \mathbb{C}[X]$ unitaire de degré n. On pose :

$$\Phi : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{C}[X] & \longrightarrow & \mathcal{L}(E) \\ A & \longmapsto & f_A \end{array} \right.$$

21. Montrer que Φ est linéaire.
22. Montrer que $\mathrm{Ker}(\Phi)$ est l'ensemble des polynômes divisibles par B, puis que $\mathrm{Ker}(\Phi) \oplus E = \mathbb{C}[X]$.
23. En déduire la dimension de $\mathrm{Im}(\Phi)$. A-t-on $\mathrm{Im}(\Phi) = \mathcal{L}(E)$?

Exercice 2. Analyse-probabilités

Le théorème de Moivre-Laplace permet d'approcher les calculs de probabilité pour une variable aléatoire suivant une loi binomiale de paramètres $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ et $p \in [0,1]$ par des calculs d'intégrales de fonctions gaussiennes. Une première démonstration a été donnée en 1733 par Abraham de Moivre pour le cas où $p = \frac{1}{2}$.

La **partie I** permet d'obtenir un résultat de convergence. La **partie II** aboutit à un calcul exact de fonction gaussienne dite « intégrale de Gauss ». La **partie III** permet d'établir une majoration utile à la **partie IV** qui s'intéresse à la convergence simple d'une suite de fonctions vers une fonction gaussienne. Ce résultat de convergence constitue une étape clé dans une démonstration possible du théorème de Moivre-Laplace.

Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Pour tout $k \in [[0, 2n]]$, on pose

$$a_{k,n} = \frac{\sqrt{2n}}{2^{2n+1}} \binom{2n}{k} \qquad \text{et} \qquad u_n = a_{n,n} = \frac{\sqrt{2n}}{2^{2n+1}} \binom{2n}{n}$$

Pour tout $m \in \mathbb{N}$ on pose

$$I_m = \int_0^1 \left(1 - t^2\right)^{\frac{m}{2}} \mathrm{d}t$$

Partie I – Convergence d'une suite

1. Justifier l'existence de I_m pour $m \in \mathbb{N}$, puis montrer que la suite $(I_m)_{m \in \mathbb{N}}$ est décroissante.
2. Montrer en faisant une intégration par parties, que pour tout $m \in \mathbb{N}$

$$I_{m+2} = \left(1 + \frac{m}{2}\right) \int_0^1 2t^2 (1 - t^2)^{\frac{m}{2}} \mathrm{d}t$$

3. En remarquant que $t^2 = 1 - (1 - t^2)$, déduire de la question précédente que pour tout $m \in \mathbb{N}$

$$I_{m+2} = \frac{m+2}{m+3} I_m.$$

4. (a) Calculer I_2.
   (b) Calculer la valeur de I_1 en posant $t = \sin(u)$. La validité de ce changement devra être justifiée.
5. (a) Calculer pour $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ le rapport $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$.
   (b) Déduire par un raisonnement par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$

$$I_{2n} = \frac{\sqrt{2n}}{2(2n+1)u_n} \qquad \text{et} \qquad I_{2n-1} = \frac{\pi}{\sqrt{2n}} u_n$$

6. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$:

$$I_{2n} \neq 0 \qquad \text{et} \qquad 1 \leqslant \frac{I_{2n-1}}{I_{2n}} \leqslant \frac{I_{2n-2}}{I_{2n}}$$

   En déduire que

$$\frac{1}{1 + \frac{1}{2n}} \leqslant 2\pi \left(u_n\right)^2 \leqslant 1$$

7. En déduire la convergence de la suite $(u_n)_{n \geqslant 1}$ lorsque n tend l'infini, puis que

$$I_{2n} \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{n}}$$

Partie II – Calcul d'une intégrale de Gauss

Pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, on pose
$$J_n = \int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n \mathrm{d}t$$
Pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ et pour tout $t \in \mathbb{R}^+$, on pose :
$$w_n(t) = \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n$$
On remarquera que la suite $(w_n(t))_{n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}}$ dépend du paramètre $t \in \mathbb{R}^+$ fixé.

8. À l'aide d'un changement de variable simple, déduire de la question 7 que la suite $(J_n)_{n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}}$ converge et donner sa limite.
9. Soit $t \in \mathbb{R}^+$ un réel fixé. Montrer qu'à partir d'un certain rang, les termes de la suite $(w_n(t))_{n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}}$ sont strictement positifs, puis que la suite $(w_n(t))_{n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}}$ converge quand $n \to +\infty$ vers un réel ℓ_t (qui dépend de t) et donner la valeur de ℓ_t.

On admet pour la suite l'inégalité suivante
$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall t \in [0, \sqrt{n}],\quad 0 \leq e^{-t^2} - \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n \leq \frac{e}{n}$$
et on considère la fonction φ suivante, ainsi que l'intégrale de Gauss, dont on prouvera l'existence plus tard :
$$\varphi : x \mapsto \int_0^x e^{-t^2}\mathrm{d}t, \qquad \text{et} \qquad K = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{2\pi}} = \lim_{x\to+\infty} \int_{-x}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{2\pi}}$$

10. On admet que φ admet une limite $\alpha \in \mathbb{R}$ en $+\infty$. Donner la valeur de α en justifiant votre réponse.
11. Montrer que K existe, c'est-à-dire que
$$\psi(x) = \int_{-x}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{2\pi}} \qquad \text{admet une limite finie quand } x \to +\infty,$$
et déduire des questions précédentes une valeur exacte de K.

Partie III – Calcul d'une majoration

12. On veut montrer qu'il existe une fonction $g : \left[0, \frac{1}{2}\right] \to \mathbb{R}$ et un réel $M \geqslant 0$, tels que :
$$\forall x \in \left[0, \frac{1}{2}\right], \quad \frac{1-x}{1+x} = e^{-2x+g(x)} \quad \text{et} \quad |g(x)| \leqslant Mx^3 \tag{1}$$
    (a) Donner une expression explicite de $g(x)$ pour $x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$ vérifiant l'égalité $\frac{1-x}{1+x} = e^{-2x+g(x)}$
    (b) On pose $a : x \mapsto \frac{g(x)}{x^3}$. Calculer la limite lorsque x tend vers 0 de $a(x)$.
    (c) Montrer que l'on peut prolonger a en une fonction continue sur $\left[0, \frac{1}{2}\right]$, et conclure.
13. Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Montrer que pour tout $k \in [\![n+1, 2n]\!]$
$$\frac{a_{k,n}}{a_{n,n}} = \frac{\prod_{i=1}^{k-n-1} \left(1 - \frac{i}{n}\right)}{\prod_{i=1}^{k-n-1} \left(1 + \frac{i}{n}\right)} \times \frac{n}{k}$$

14. En déduire que pour tout $k \in \mathbb{N}$ tel que $n+1 \leqslant k \leqslant \frac{3n}{2}+1$, il existe $b_{k,n} \in \mathbb{R}$ tel que

$$|b_{k,n}| \leqslant \frac{M}{n^3}(k-n-1)^4 \qquad \text{et} \qquad \frac{a_{k,n}}{a_{n,n}} = \frac{n}{k} e^{b_{k,n}} e^{-\frac{1}{n}(k-n-1)(k-n)}$$

Partie IV – Vers le théorème de Moivre-Laplace

On considère une suite de variables aléatoires $(X_n)_{n\geqslant 1}$ définies sur un espace probabilisé fini (Ω, P). On suppose que pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, la variable aléatoire X_n suit une loi binomiale $\mathcal{B}\left(2n, \frac{1}{2}\right)$ et on pose :

$$Z_n = \frac{2X_n - 2n}{\sqrt{2n}}.$$

Pour tout $k \in [\![0, 2n]\!]$, on pose $t_{k,n} = \frac{2k-2n}{\sqrt{2n}}$ et $J_{k,n} = \left[t_{k,n} - \frac{1}{\sqrt{2n}}, t_{k,n} + \frac{1}{\sqrt{2n}}\right[$. On admet que les intervalles $J_{k,n}$, pour $k \in [\![0, 2n]\!]$, sont disjoints deux à deux et que

$$\left[-\sqrt{2n} - \frac{1}{\sqrt{2n}}, \sqrt{2n} + \frac{1}{\sqrt{2n}}\right[= \bigcup_{k=0}^{2n} J_{k,n}.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, on définit une fonction $h_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ en escalier de la manière suivante :

$$h_n : t \mapsto \begin{cases} \frac{\sqrt{2n}}{2} \mathrm{P}\left(X_n = k\right) & \text{s'il existe } k \in [[0, 2n]] \text{ tel que } t \in J_{k,n}, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

15. Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Déterminer la loi, l'espérance et la variance de la variable aléatoire Z_n.
16. Soit $x \in]0, +\infty[$. Montrer qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$, tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, vérifiant $n \geqslant n_0$, il existe $k_n \in \mathbb{N}$, tel que $x \in J_{k_n,n}$. Vérifier qu'alors :

$$k_n - n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{x\sqrt{2n}}{2} \quad , \quad t_{k_n,n} \underset{n\to+\infty}{\sim} x \quad , \quad k_n \underset{n\to+\infty}{\sim} n.$$

17. Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Vérifier que pour tout $k \in [\![0, 2n]\!]$, $h_n\left(t_{k,n}\right) = a_{k,n}$. Montrer ensuite, en utilisant les résultats des questions 7, 14, 16, que la suite $(h_n(t))_{n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}}$ à $t \in \mathbb{R}^+$ fixé converge vers un réel $a(t)$ dont on précisera sa limite.

La convergence simple de cette suite de fonctions $(h_n)_{n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}}$, qui peut être prouvée sur tout $\mathbb{R}$, est une étape importante permettant de démontrer un cas particulier du théorème de Moivre-Laplace :

Théorème
Pour tous réels a et b tels que $a < b$: $$\lim_{n\to+\infty} \mathrm{P}(a \leqslant Z_n \leqslant b) = \int_a^b e^{-\frac{t^2}{2}} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{2\pi}}.$$