DM5 – Intégration, applications linéaires

À rendre pour le 28/04/2024.
Facultatif

L'objet de ce problème est de résoudre dans certains cas l'équation fonctionnelle suivante :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) - \int_0^x (x-t)f(t)\mathrm{d}t = g(x), \tag{$\mathcal{E}$}$$

où $f \in C^0(\mathbb{R})$ est l'inconue et g est une fonction donnée définie sur $\mathbb{R}$.

A - Dans cette partie on suppose que la fonction g est C^2 sur $\mathbb{R}$.

1. Montrer que les fonctions f solutions de $(\mathcal{E})$ sont elles aussi deux fois dérivables et qu'elles vérifient l'équation :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f''(x) - f(x) = g''(x). \tag{$\mathcal{F}$}$$

2. En déduire la résolution de l'équation $(\mathcal{E})$ quand g est une fonction affine. On explicitera notamment le cas où la fonction g est nulle.
3. Déduire aussi que l'équation $(\mathcal{E})$ (que g soit dérivable ou non) a au plus une solution.
4. Montrer que les solutions de $(\mathcal{F})$ sont les fonction f définies par :

$$f(x) = \frac{\mathrm{e}^x}{2}\left[\int_0^x \mathrm{e}^{-t}g''(t)\mathrm{d}t + k_A\right] - \frac{\mathrm{e}^{-x}}{2}\left[\int_0^x \mathrm{e}^{t}g''(t)\mathrm{d}t + k_B\right]$$

   où k_A et k_B parcourent $\mathbb{R}$.
5. Montrer que si la fonction f écrite ci-dessus vérifie les relations :

$$f(0) = g(0) \quad \text{et} \quad f'(0) = g'(0),$$

   alors f est solution de $(\mathcal{E})$.
6. Expliciter la solution f de $(\mathcal{E})$ quand g est la fonction exponentielle.

B - Dans cette partie, on suppose que la fonction g est seulement continue.

On note E l'ensemble des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

7. On définit l'application A qui à une fonction f de E associe la fonction (notée $A(f)$) définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ A(f)(x) = \int_0^x (x-t)f(t)\mathrm{d}t.$$

   Montrer que l'application A est un endomorphisme de E et qu'il est injectif.
8. Montrer que pour tout $f \in E$, $A(f)$ est deux fois dérivable et donner l'expression de $(A(f))''$. Montrer également que $A(f)$ et $(A(f))'$ s'annnulent en 0.

Pour $n \in \mathbb{N}$ on désigne par $A^n = A \circ A \cdots \circ A$ la n^{e} itérée de l'application A.

9. Montrer que pour tout $f \in E$, $A^2(f) : x \mapsto \displaystyle\int_0^x \frac{1}{3!}(x-t)^3 f(t)\mathrm{d}t$.
10. Généraliser ce résultat à $A^n(f)$. Justifier votre réponse.

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$U_n = A + A^2 + \cdots + A^n = \sum_{k=1}^{n} A^k.$$

Soit $U : f \mapsto U(f)$ l'application de E dans E définie par :

$$\forall f \in E,\ U(f) : x \mapsto \int_0^x \mathrm{sh}(x-t) f(t) \mathrm{d}t.$$

11. Montrer que pour tout $u \in \mathbb{R}$ on a :

$$\left| \mathrm{sh}(u) - \sum_{k=1}^{n} \frac{u^{2k-1}}{(2k-1)!} \right| \leq \mathrm{ch}(u) \frac{|u|^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

12. En déduire que pour tout réel x :

$$|U(f)(x) - U_n(f)(x)| \leq \mathrm{ch}(x) \frac{|x|^{2n+1}}{(2n+1)!} \int_0^x |f(t)| \mathrm{d}t.$$

13. Montrer les égalités : $U \circ A = A \circ U = U - A$.
14. Soit $I : f \mapsto f$ l'application identité de E dans E. Montrer que les application $I - A$ et $I + U$ sont des bijections de E dans E, réciproques l'une de l'autre.
    En déduire la fonction de E solution de l'équation $(\mathcal{E})$.
15. Expliciter f pour la fonction g paire et telle que g est définie sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$g : x \mapsto \left\{ \begin{array}{rcl} x & \text{si} & x \in [0, 1[\\ 2 - x & \text{si} & x \in [1, 2[\\ 0 & \text{si} & x \geq 2 \end{array} \right. .$$