

CORRECTION DU TD 15 : ESPACES VECTORIELS

Exercice 1

7. N'est pas un s.e.v. de $\mathbb{R}^2$ car ne contient pas $(0, 0)$.
8. N'est pas un s.e.v. de $\mathbb{R}[X]$ car ne contient pas $0_{\mathbb{R}[X]}$.
9. C'est bien un s.e.v. de $C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$:
 - $F \subset C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
 - La fonction nulle $f: x \mapsto 0$ est bien C^1 et vérifie bien $f(0) + f(1) = f'(0)$ car $0 + 0 = 0$.
 - Soit f et g dans F et λ, μ dans $\mathbb{R}$. Alors $\lambda f + \mu g$ est C^1 comme combinaison linéaire de telles fonctions et

$$(\lambda f + \mu g)(0) + (\lambda f + \mu g)(1) = \lambda(f(0) + f(1)) + \mu(g(0) + g(1)) = \lambda f'(0) + \mu g'(1) = (\lambda f + \mu g)'(1)$$

donc $\lambda f + \mu g \in F$.

10. Ce n'est pas un s.e.v. de $C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ car il ne contient pas $x \mapsto 0$.
11. C'est bien un s.e.v. de $C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$:
 - $F \subset C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
 - La fonction nulle $f: x \mapsto 0$ est bien C^1 et vérifie bien $f(1) = 0$ car $0 = 0$.
 - Soit f et g dans F et λ, μ dans $\mathbb{R}$. Alors $\lambda f + \mu g$ est C^1 comme combinaison linéaire de telles fonctions et

$$(\lambda f + \mu g)(1) = \lambda f(1) + \mu g(1) = \lambda 0 + \mu 0 = 0$$

donc $\lambda f + \mu g \in F$.

12. C'est bien un s.e.v. de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$:
 - Il est inclus dans $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.
 - La suite nulle $(0)_{n \in \mathbb{N}}$ tend bien vers 0.
 - Si u et v sont deux suites réelles qui tendent vers 0 et λ, μ deux réels alors par linéarité de la limite $\lambda u + \mu v$ tend aussi vers 0.

Exercice 2

1. Non car toute combinaison linéaire de $(2, 3, 0)$ et $(3, 2, 0)$ a un 0 en troisième coordonnée.
2. On peut poser un système linéaire en regardant les coefficients de $\lambda \cdot (8X^3 - 5X^2 + 1) + \mu \cdot (X^2 + 7X - 2) +$ mais on peut aussi remarquer que pour combiner ces deux vecteurs en $16X^3 - 7X^2 + 21X - 4$, il est nécessaire que $\lambda = 8$ (cf. le terme de degré 3) et $\mu = 3$ (c.f. le terme de degré 1). Ainsi on calcule

$$2 \cdot (8X^3 - 5X^2 + 1) + 3 \cdot (X^2 + 7X - 2) = 16X^3 - 7X^2 + 21X - 4$$

et la réponse est oui.

3. Oui par la formule de linéarisation

$$\forall x \in \mathbb{R}, \cos^2(x) = \frac{1 + \cos(2x)}{2}$$

donc

$$\cos^2 = \frac{1}{2} \cdot (x \mapsto 1) + \frac{1}{2} \cdot (x \mapsto \cos(2x))$$

4. Non. Supposons par l'absurde qu'il existe λ et μ des réels tels que $\forall x \in \mathbb{R}, \sin(2x) = \lambda \sin(x) + \mu \cos(x)$. L'évaluation en 0 donne $\mu = 0$, donc $\forall x \in \mathbb{R}, \sin(2x) = \lambda \sin(x)$. L'évaluation en $\frac{\pi}{2}$ donne alors $\lambda = 0$ donc il reste $\forall x \in \mathbb{R}, \sin(2x) = 0$ ce qui est bien sûr impossible, par exemple pour $x = \frac{\pi}{4}$.

Exercice 3

- Par caractérisation :
 - Il est inclus dans $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.
 - La fonction nulle est bien T -périodique.
 - Si f et g sont T -périodiques et λ, μ sont des réels alors

$$\forall x \in \mathbb{R}, (\lambda f + \mu g)(x + T) = \lambda f(x + T) + \mu g(x + T) = \lambda f(x) + \mu g(x) = (\lambda f + \mu g)(x)$$

donc $\lambda f + \mu g$ est T -périodique.

- Celui des fonctions croissantes : non car par exemple il contient $\exp$ mais pas $-\exp$. Celui des fonctions monotones : non car par exemple $x \mapsto x$ et $x \mapsto e^x$ en font partie mais la combinaison linéaire $x \mapsto x - e^x$ n'est pas monotone.

Celui des sommes d'une fonction croissante et d'une fonction décroissante oui car :

- c'est un sous-ensemble de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$
- $0_{\mathbb{R}^{\mathbb{R}}} = 0_{\mathbb{R}^{\mathbb{R}}} + 0_{\mathbb{R}^{\mathbb{R}}}$ est bien la somme d'une fonction croissante et d'une fonction décroissante.
- Si $f = f_1 + f_2$ avec f_1 croissante et f_2 décroissante et de même pour $g = g_1 + g_2$ et λ, μ sont réels alors

$$\lambda f + \mu g = \lambda f_1 + \lambda f_2 + \mu g_1 + \mu g_2$$

et selon le signe de λ et μ on peut regrouper d'un côté des fonctions croissantes et de l'autre des fonctions décroissantes (il y a quatre cas), dans tous les cas $\lambda f + \mu g$ reste somme d'une fonction croissante et d'une fonction décroissante.

- Fonctions majorées : non, par exemple $x \mapsto -\exp(x)$ est majorée mais son opposé ne l'est pas. Celui des fonctions bornées, oui car
 - c'est un sous-ensemble de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$
 - la fonction nulle est bien bornée
 - si f et g sont bornées, disons par M_1 et M_2 , et λ, μ sont réels alors $\lambda f + \mu g$ est bornée car

$$|\lambda f + \mu g| \leq |\lambda| |f| + |\mu| |g| \leq |\lambda| M_1 + |\mu| M_2$$

Exercice 7

Notons pour tout $k \in \mathbb{N}$, $u_k : x \mapsto \cos(kx)$ et $v_k : x \mapsto \cos(x)^k$. Il s'agit de montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\text{Vect}(u_0, \dots, u_n) = \text{Vect}(v_0, \dots, v_n)$$

Comme $u_0 = v_0$ et $u_1 = v_1$ le résultat est évident pour $n \in \{0, 1\}$. L'observation fondamentale de cet exercice est que comme $\forall a, b \in \mathbb{R}, \cos(a) \cos(b) = \frac{1}{2} (\cos(a+b) + \cos(a-b))$, on va pouvoir transformer les v_k en des combinaisons de u_ℓ pour $0 \leq \ell \leq k$ et passer d'un espace engendré à l'autre par opérations élémentaires. Par exemple

$$\forall x \in \mathbb{R}, \cos^2(x) = \cos(x) \cos(x) = \frac{1}{2} (\cos(2x) + \cos(0x)) = \frac{1}{2} (\cos(2x) + 1)$$

donc

$$v_2 = \frac{1}{2}(u_2 + u_0)$$