1. Pour tout $(x,y,z),(x',y',z') \in \mathbb{R}^3$, pour tous réels λ,μ, on a :
$\varphi_1(\lambda(x,y,z)+\mu(x',y',z')) = -4(\lambda x+\mu x')+3(\lambda y+\mu y')+\lambda z+\mu z' = \lambda\varphi_1((x,y,z))+\mu\varphi_1((x',y',z'))$.
Ainsi, $\boxed{\varphi_1 \text{ est linéaire.}}$

2. Soit $X,X' \in \mathbb{R}^3$ et deux réels λ,μ. Alors : $u(\lambda X+\mu X') = (\lambda\varphi_1(X)+\mu\varphi_1(X'), \lambda\varphi_2(X)+\mu\varphi_2(X'), \lambda\varphi_3(X)+\mu\varphi_3(X'))$ par linéarité des application φ_j. Ainsi, $u(\lambda X+\mu X') = \lambda u(X)+\mu u(X')$. u est donc linéaire. De plus, pour tout j, φ_j va de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$, donc $u : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$.
Ainsi, $\boxed{u \text{ est un endomorphisme de } \mathbb{R}^3.}$

3. Dans la base canonique $\mathcal{B}_0$, les coordonnées du premier vecteur est $(1,0,0)$ et $u(1,0,0) = (-4,-5,3)$ que l'on écrit en colonne pour avoir la première colonne de la matrice. de même pour $u(0,1,0)$ et $u(0,0,1)$.
Ainsi, $\boxed{A = \begin{pmatrix} -4 & 3 & 1 \\ -5 & 4 & 2 \\ 3 & -2 & 0 \end{pmatrix}}$.

4. Après calcul, $A^2 = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 2 \\ 6 & -3 & 3 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ puis $\boxed{A^3 = O_{3,3}}$.
On en déduit que $u \circ u \circ u$ est l'endomorphisme contant égal à 0_E : $u^3 = \underline{0} : X \mapsto 0_E$.

5. On résout $u(x,y,z) = 0$, soit $\begin{cases} -4x+3y+z &= 0 \\ -5x+4y+2z &= 0 \\ 3x-2y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z &= 4x-3y = \dfrac{-1}{2}x \\ y &= \dfrac{3}{2}x \end{cases}$ On a fait $L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$, et on retrouve la dernière équation .
Ainsi $\ker(u) = \{(x, \frac{3}{2}x, -\frac{x}{2}), x \in \mathbb{R}\} = \text{Vect}\{(1, \frac{3}{2}, -\frac{1}{2})\} = \boxed{\text{Vect}\{(2,3,-1)\}}$
Le vecteur $(2,3,-1)$ est générateur de $\ker u$, et forme une famille libre car c'est une famille à un seul vecteur non nul, donc forme une base de $\ker u$.

$$\boxed{\ker(u) \text{ est une droite vectorielle.}}$$

D'après la formule du rang comme $\mathbb{R}^3$ est de dimension finie, $\boxed{rg(u) = 2}$

6. Comme la matrice de u^2 dans la base canonique est A^2, le noyau de $u \circ u$ est le noyau de A^2. On se retrouve à un système de trois équations de rang 1, qui équivaut à résoudre $\boxed{-2x+y-z=0}$, ce qui est l' équation du plan $\ker u^2$.
Ainsi, $\ker(u^2) = \{(x,y,-2x+y),(x,y) \in \mathbb{R}^2\} = \boxed{\text{Vect}\{(1,0,-2);(0,1,1)\}}$.
En posant $f_1 = (1,0,-2)$ et $f_2 = (0,1,1)$, la famille $\mathcal{F} = (f_1,f_2)$ est une famille génératrice de $\ker(u^2)$.
* De plus $\mathcal{F}$ est libre car si $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$ tels que $\alpha f_1 + \beta f_2 = 0_E$, alors $\alpha = \beta = 0$ par les deux premières coordonnées.

$$\boxed{\text{Donc } \mathcal{F} \text{ est une base de } \ker(u^2).}$$

7. Comme $A^3=0$, alors pour tout $X\in\mathbb{R}^3$, $u^3(X)=0$. Soit $Y\in\mathrm{Im}(u)$. Alors $\exists X\in\mathbb{R}^3$, $Y=u(X)$. Donc $u^2(Y)=u^3(X)=0$. Ainsi, $Y\in\ker u^2$. DOnc $\boxed{\mathrm{Im}(u)\subset\ker u^2}$. De plus, d'après la question précédente, $\mathrm{rg}(u)=2=\dim(\ker(u^2))$. Donc $\boxed{\mathrm{Im}(u)=\ker(u^2)}$.

8. $u(x_0)=(0,1,1)$ et $u^2(x_0)=(4,6,-2)$.
   Soit λ,μ,ν trois réels tels que $\lambda x_0+\mu u(x_0)+\nu u^2(x_0)=0$. On résout le système par pivot de Gauss. La première équation donne $\lambda=0$, puis en remplaçant $\mu=0$, et enfin $\nu=0$.
   Ainsi, la famille $\{x_0,u(x_0),u^2(x_0)\}$ est une famille libre, de trois vecteurs dans un espace de dimension 3 : c'est donc une base de $\mathbb{R}^3$.

9. Par définition, la matrice de passage de $\mathcal{B}_0$ à $\mathcal{B}_1$ contient les coordonnées des vecteurs de la base $\mathcal{B}_1$ dans la base $\mathcal{B}_0$. Ainsi,
   $\boxed{P=\begin{pmatrix}1&0&4\\1&1&6\\1&1&-2\end{pmatrix}}$ .Dans la base $\{x_0,u(x_0),u^2(x_0)\}$, la matrice de u est : $\boxed{B=\begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}}$ car
   $u(x_0)=0x_0+1u(x_0)+0u^2(x_0)$;
   $u(u(x_0))=0x_0+0u(x_0)+1u^2(x_0)$;
   $u(u^2(x_0))=0x_0+0u(x_0)+0u^2(x_0)$
   D'après les formules de changements de bases, on a : $\boxed{A=PBP^{-1}.}$

10. Soit α,β,γ trois réels tels que : $\alpha x+\beta u(x)+\gamma u^2(x)=0$.
    En composant par u^2, comme $u^3=u^4=\underline{0}$, alors $\alpha u^2(x)=0$. Alors $u^2(x)\neq 0$, donc $\alpha=0$.
    On remplace dans la première équation, et on compose par u : $\beta u^2(x)=0$, donc $\beta=0$.
    Enfin, en remplaçant dans la première équation : $\gamma=0$. Ainsi, la famille $\{x,u(x),u^2(x)\}$ est libre, formée de trois vecteurs dans un espace vectoriel de dimension 3. $\boxed{\text{C'est donc une base de } \mathbb{R}^3.}$

11(a) Soit v un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ qui commute avec u (c'est à dire tel que $vou=uov$) et x un vecteur n'appartenant pas au noyau de u^2.Alors $\{x,u(x),u^2(x)\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$ donc il existe $(\alpha_0,\beta_0,\gamma_0)\in\mathbb{R}^3$ tel que $v(x)=\alpha_0x+\beta_0u(x)+\gamma_0u^2(x)$.

(b) on a : $v(x)=(\alpha_0id+\beta_0u+\gamma_0u^2)(x)$. Comme u et v commutent,
   Alors $v(u(x))=u(v(x))=u(\alpha_0x+\beta_0u(x)+\gamma_0u^2(x))=(\alpha_0id+\beta_0u+\gamma_0u^2)(u(x))$
   de même, $v(u^2(x))=(\alpha_0id+\beta_0u+\gamma_0u^2)(u^2(x))$
   Ainsi, v et $\alpha_0id+\beta_0u+\gamma_0u^2$ coincident sur la base $\{x,u(x),u^2(x)\}$, donc sont deux applications linéaires égales.
   $$\boxed{v=\alpha_0id+\beta_0u+\gamma_0u^2}$$

12. On a montré question 10 que si $x\notin\ker u^2$, $\{x,u(x),u^2(x)\}$ forme une famille libre. Ainsi, id,u,u^2 est une famille libre (en effet, si on prend une combinaison linéaire nulle des applications, on la regarde en x et on en déduit que tous les scalaires sont nuls.)
    Or A est la matrice de u, donc $\boxed{\{I_3,A,A^2\} \text{ forme une famille libre.}}$

13. De part sa définition, $\mathcal{E}=\mathrm{Vect}(I_3,A,A^2)$ est le plus petit sous-espace vectoriel contenant I_3,A,A^2, donc est un sous-espace vectoriel de l'ensemble des matrices, dont une famille génératrice est $\{I_3,A,A^2\}$.
    De plus, d'après la question précédente, la famille $\{I_3,A,A^2\}$ est libre donc forme une base de $\mathcal{E}$, qui est alors de dimension 3.

14. On va utiliser la caractérisation de sous-anneau de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

- $\mathcal{E} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
- $I_3 = I_3 + 0A + A^2 \in \mathcal{E}$.
- Comme $\mathcal{E}$ est un espace vectoriel, il est stable par soustraction.
  Soit B, C deux matrices de $\mathcal{E}$. Il existe des réels $\alpha, \beta, \gamma, \alpha', \beta', \gamma'$ tels que $B = \alpha I_3 + \beta A + \gamma A^2$ et $C = \alpha' I + \beta' A + \gamma' A^2$.
  Donc $BC = \alpha\alpha' I_3 + (\alpha\beta' + \alpha'\beta)A + (\alpha\gamma' + \beta\beta' + \alpha'\gamma)A^2 \in \mathcal{E}$.
  $\boxed{\text{Ainsi, } \mathcal{E} \text{ est un sous-anneau de } \mathcal{M}_3(\mathbb{R}).}$

15. D'après la question 11. , les endomorphismes qui commutent avec u sont combinaison linéaire de id, u, u^2. Donc :
    Si B commute avec A, alors B est un élément de $\mathcal{E}$.
    Réciproque : si B appartient $\mathcal{E}$, alors B commute de manière évidente avec A.
    $\boxed{\text{Conclusion : l'ensemble des matrices commutant avec } A \text{ est } \mathcal{E}.}$

16. Comme $\mathcal{E}$ est stable par multiplication et que $B \in \mathcal{E}$, on a bien : $\Phi_B : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$.
    De plus, la multiplication à droite de matrices est linéaire, donc Φ_B est un endomorphisme de $\mathcal{E}$.
    $\Phi_B(I_3) = \alpha I_3 + \beta A + \gamma A^2$; $\Phi_B(A) = \alpha A + \beta A^2$ $\Phi_B(A^2) = \alpha A^2$. Ainsi, la matrice de Φ_B dans la base I_3, A, A^2 est : $\boxed{M(\Phi_B) = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ \beta & \alpha & 0 \\ \gamma & \beta & \alpha \end{pmatrix}}$

17. • Supposons Φ_B bijective. Alors comme $I_3 \in \mathcal{E}$. Comme Φ_B est surjective, il existe $C \in \mathcal{E}$ tel que $\Phi_B(C) = I$, donc $BC = I_3$. Ainsi, B est inversible à droite donc $\boxed{B \text{ est inversible}}$

    • Supposons que B soit inversible :
    Alors Φ_B est injective. En effet, si $X \in \ker \Phi_B$, on a : $BX = 0$. Or en composant par B^{-1}. Donc $X = 0$.
    Ainsi, Φ_B est un endomorphisme injectif d'un espace vectoriel de dimension 9.
    $\boxed{\text{Donc } \Phi_B \text{ est bijective.}}$

18. Une matrice B est inversible si et seulement si Φ_B est inversible, c'est-à-dire si et seulement si $M(\Phi_B)$ est inversible, ce qui équivaut à $\boxed{\alpha \neq 0.}$ car $M(\Phi_B)$ est triangulaire supérieure à coefficients diagonaux tous égaux à α.

19. On remarque que $\Phi_B \circ \Phi_B : X \mapsto B(BX) = B^2 X$. Ainsi, $(\Phi_B)^n(I_3) = B^n$.
    Calculons $M(\Phi_B)^n$. Or $M(\Phi_B) = \alpha I + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \beta & 0 & 0 \\ \gamma & \beta & 0 \end{pmatrix} = \alpha I + N$. Or $N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \beta^2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $N^3 = 0$.
    Or αI_3 et N commutent, donc d'après la formule du binome,
    $M(\Phi_B) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \alpha^{n-k} N^k = \alpha^n I_3 + n\alpha^{n-1} N + \frac{n(n-1)}{2} \alpha^{n-2} N^2$
    Donc $\boxed{\Phi_B(I_3) = B^n = \alpha^n I_3 + n\alpha^{n-1}\beta A + (\gamma n\alpha^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}\alpha^{n-2}\beta^2)A^2}$

20. soit λ, μ deux réels. Si on effectue l'opération $L_1 \longleftarrow L_1 + \lambda L_2 + \mu L_3$, le coefficient première -première colonne devient :
    $\alpha + \beta(-4 - 5\lambda + 3\mu) + \gamma(4 + 6\lambda - 2\mu)$.

On cherche donc λ et μ tels que : (S) : $\begin{cases} -5\lambda+3\mu = & = & 4 \\ 6\lambda - 2\mu = -4 \end{cases}$

On résout ce système par équivalence (en remplaçant additionnant la deuxième ligne à la première et en simplifiant la première) :

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda+\mu = & = & 0 \\ 3\lambda-\mu = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \boxed{\lambda = -\frac{1}{2} \text{ et } \mu = \frac{1}{2}}.$$

Ainsi, en prenant ces valeurs, on annule les termes en β et γ du coefficient première ligne, première colonne.

La première ligne devient alors :

$$\boxed{\begin{pmatrix} \alpha & -\frac{1}{2}\alpha & \frac{1}{2}\alpha \end{pmatrix}}$$

Les termes en β et γ des autres termes de la première ligne disparaissent aussi.

21. On effectue ensuite les opérations suivantes :
$C_2 \leftarrow C_2 + \frac{1}{2}C_1$, et $C_3 \leftarrow C_3 - \frac{1}{2}C_1$, ce qui ne change par la valeur du déterminant. On obtient alors :

$$D = \begin{vmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ -5\beta+6\gamma & \alpha+\frac{3}{2}\beta & \frac{9}{2}\beta \\ 3\beta-2\gamma & -\frac{1}{2}\beta & \alpha-\frac{3}{2}\beta \end{vmatrix}$$

22. En développant par rapport à la première ligne, un seul coefficient étant non nul :

$$D = +\alpha \cdot \begin{vmatrix} \alpha+\frac{3}{2}\beta & \frac{9}{2}\beta \\ -\frac{1}{2}\beta & \alpha-\frac{3}{2}\beta \end{vmatrix} = \alpha\left((\alpha+\frac{3}{2}\beta)(\alpha-\frac{3}{2}\beta) - (-\frac{1}{2}\beta)(\frac{9}{2}\beta)\right) = \boxed{\alpha^3}.$$

23. Si A' et B' sont deux matrices semblables, elles ont même déterminant. En effet, il existe une matrice P inversible telle que : $A' = PB'P^{-1}$, et donc :

$$\boxed{\det A' = \det P \cdot \det B' \cdot \frac{1}{\det P} = \det B'.}$$

Le déterminant D cherché peut s'écrire à l'aide des matrices précédentes :
$D = \det(\alpha I_3 + \beta A + \gamma A^2) = \det(\alpha id + \beta u + \gamma u^2)$.
Deux matrices représentant le même endomorphisme dans des bases différentes étant semblables et donc ayant même déterminant, on peut calculer le déterminant de l'endomorphisme $\alpha id+\beta u+\gamma u^2$ dans la base $\mathcal{B}_1$, dans laquelle la matrice de u est :

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \text{ et celle de } u^2 \text{ est : } B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ainsi, $D = \begin{vmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ \beta & \alpha & 0 \\ \gamma & \beta & \alpha \end{vmatrix} = \boxed{\alpha^3}$, et on retrouve le résultat précédent.

Corrigé du DS n°11 Analyse-Probabilités du 07/06/2023

Correction.

1. (a) Soit $k \in [\![1, 10]\!]$. X_k suit une loi de Bernoulli car elle ne prend que les valeurs 0 et 1. Son paramètre p_k est la probabilité de n'avoir jamais obtenu, lors des $k-1$ premiers tirages, le numéro tiré au $k^{\text{ème}}$ tirage. La probabilité que le premier tirage ne tombe pas sur le même que le $k^{\text{ème}}$ est $\frac{n-1}{n}$. De même pour tous les tirages jusqu'au $(k-1)^{\text{ème}}$. Par indépendance mutuelle des tirages, ce paramètre est donc $p_k = \left(\frac{n-1}{n}\right)^{k-1}$

   (b) $Z = \sum_{k=0}^{10} X_k$.

   (c) Par linéarité de l'espérance, et comme pour tout $k \in [\![1, 10]\!]$ on a $\mathbf{E}(X_k) = p_k$,

$$\mathbf{E}(Z) = \sum_{k=1}^{10} p_k = \sum_{k=1}^{10} \left(\frac{n-1}{n}\right)^{k-1} = \sum_{k=0}^{9} \left(\frac{n-1}{n}\right)^{k} = \frac{1-\left(\frac{n-1}{n}\right)^{10}}{1-\left(\frac{n-1}{n}\right)} = n\left(1-\left(\frac{n-1}{n}\right)^{10}\right).$$

   (d) C'est une forme indéterminée. On utilise un développement limité pour la lever. On a $\left(\frac{n-1}{n}\right)^{10} = \left(1-\frac{1}{n}\right)^{10} = 1 - 10\frac{1}{n} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right)$ d'où $1-\left(\frac{n-1}{n}\right)^{10} = 10\frac{1}{n} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right)$. D'où

$$\mathbf{E}(Z) = 10 + \underset{n\to+\infty}{o}(1) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 10$$

   ce qui est naturel : avec un très grand nombre de boules, il est normal qu'en moyenne on obtienne les 10 numéros possibles !

2. (a)

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} \mathbf{P}(X \geq k) = &\mathbf{P}(X=1) && +\mathbf{P}(X=2)+\dots && +\mathbf{P}(X=n)\\ & && +\mathbf{P}(X=2)+\dots && +\mathbf{P}(X=n)\\ & && \ddots && \\ & && && +\mathbf{P}(X=n)\end{aligned}$$

   Donc

$$\sum_{k=1}^{n} \mathbf{P}(X \geq k) = 0\cdot\mathbf{P}(X=0) + 1\cdot\mathbf{P}(X=1) + \dots + n\cdot\mathbf{P}(X=n) = \mathbf{E}(X)$$

   (b) Cf. le cours.

   (c) Soit $p \in [\![1, n]\!]$. On a

$$\mathbf{P}(A \leq p) = \mathbf{P}([Y_1 \leq p] \cap \dots \cap [Y_{10} \leq p]) = \prod_{i=1}^{10} \mathbf{P}([Y_i \leq p]) = \left(\frac{p}{n}\right)^{10}$$

   où la deuxième égalité utilise l'indépendance mutuelle des tirages.

(d) On a (la dernière égalité est une réécriture du théorème des sommes de Riemann à l'aide d'un équivalent)

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}(A) &= \sum_{p=1}^{n} \mathbf{P}(A \geq p) \\
&= \sum_{p=1}^{n} (1 - \mathbf{P}(A \leq p-1)) \\
&= \sum_{p=1}^{n} \left(1 - \left(\frac{p-1}{n}\right)^{10}\right) \\
&= \sum_{p=0}^{n-1} \left(1 - \left(\frac{p}{n}\right)^{10}\right) \\
&\underset{n\to+\infty}{\sim} n\int_0^1 (1-x^{10})\mathrm{d}x = n\left(1 - \frac{1}{11}\right) = \frac{10}{11}n.
\end{aligned}$$

car la fonction $f : x \mapsto 1 - x^{10}$ est continue sur $[0, 1]$.

Correction.

1. Ces fonctions sont continues sur $\mathbb{R}_+^*$ comme quotient de telles fonctions dont le dénominateur ne s'annule pas. De plus on peut utiliser les équivalents de référence en 0

$$G(x) \sim \frac{\frac{x^2}{2}}{x} = \frac{x}{2} \to 0, \quad F(x) \sim \frac{x}{x} = 1$$

Donc F et G sont prolongeables par continuité en 0 en posant $F(0) = 1$ et $G(0) = 0$.

2. (a) Elles sont dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$ en tant que quotients de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$ dont le dénominateur ne s'annule pas. De plus, pour $x \in \mathbb{R}_+^*$, on a :

$$G'(x) = \frac{x\sin(x) - 1 + \cos(x)}{x^2}, \quad F'(x) = \frac{x\cos x - \sin x}{x^2}$$

(b) Lorsque $x \to 0$:

$$G(x) = \frac{1 - (1 - x^2/2 + o(x^2))}{x} = \frac{x}{2} + o(x), \quad F(x) = \frac{x + o(x^2)}{x} = 1 + o(x)$$

ce qui démontre que F et G, admettant un développement limité à l'ordre 1 en 0, y sont dérivables (cours), et que $G'(0) = \frac{1}{2}$, $F'(0) = 0$.

3. (a) Pour $x > 0$, on a $F(x) = 0 \iff \sin(x) = 0 \iff x \in \pi\mathbb{N}^*$. En posant $a_k = k\pi$, on a bien que les réels strictement positifs tels que $F(x) = 0$ constituent une suite $(a_k)_{k\geq 1}$ strictement croissante.

(b) Pour $x > 0$, on $G(x) = 0 \iff 1 - \cos x = 0 \iff x \in 2\pi\mathbb{N}^*$. En posant $b_k = 2k\pi = 2a_k$, on a la conclusion. On a donc $b = 2a$ dans $\mathbb{R}^{\mathbb{N}^*}$.

4. (a) On a F continue et dérivable sur $\mathbb{R}_+$ donc sur $[a_k, a_{k+1}]$ et $F(a_k) = F(a_{k+1}) = 0$. Par le théorème de Rolle, l'existence de x_k est assurée.

(b) On a, pour $x \in \mathbb{R}_+^*$, $F'(x) = \frac{x\cos(x) - \sin(x)}{x^2}$, du signe de $h(x) := x\cos(x) - \sin(x)$. h est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour $x \in \mathbb{R}$, on a $h'(x) = -x\sin(x)$, du signe de $-\sin(x)$. Or $-\sin$ reste de signe constant sur tous les intervalles $]a_k, a_{k+1}[$. Comme de plus $-\sin$ ne s'annule qu'en les a_k (donc sur aucun intervalle), on en déduit que h' est strictement monotone sur chaque intervalle $[a_k, a_{k+1}]$. La fonction h, étant continue et strictement monotone sur $[a_k, a_{k+1}]$, elle réalise une bijection de $[a_k, a_{k+1}]$ sur son image ; $h(a_k)$ et $h(a_{k+1})$ sont de plus de signes opposés. Par conséquent, h s'annule une unique fois sur $[a_k, a_{k+1}]$, et puisque $F' = x \mapsto \frac{h(x)}{x^2}$, il en est de même pour F'.

(c) On constate que $h(a_k)$ et $h(a_k + \pi/2)$ sont de signes opposés ; la conclusion suit.

(d) Puisque $x_k \geq a_k$ et que a_k tend manifestement vers $+\infty$, on a $x_k \to +\infty$. De plus, $a_k \leq x_k \leq a_k + \frac{\pi}{2}$, donc $1 \leq \frac{x_k}{a_k} \leq 1 + \frac{\pi}{2a_k}$. On en déduit (par théorème d'encadrement) que $\frac{x_k}{a_k} \to 1$, puis que $x_k \sim k\pi$.

5. Les intégrandes sont des fonctions continues sur $[0,1]$ (par produit), donc les deux intégrales sont bien définies. On dispose donc de deux fonctions I_f et J_f définies sur $\mathbb{R}$.

6. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a $I_f(-x) = \int_0^1 f(t)\cos(-xt)\mathrm{d}t = \int_0^1 f(t)\cos(xt)\mathrm{d}t = I_f(x)$, donc I_f est paire. De la même manière, on montre que J_f est impaire.

7. (a) Soit $x > 0$. On a $I_f(x) + iJ_f(x) = \int_0^1 f(t)e^{ixt}\mathrm{d}t$. Effectuons une intégration par parties : on trouve

$$I_f(x) + iJ_f(x) = \left[f(t)\frac{e^{ixt}}{ix}\right]_0^1 - \int_0^1 f'(t)\frac{e^{ixt}}{ix}\mathrm{d}t = \frac{f(1)e^{ix} - f(0)}{ix} - \frac{1}{ix}\int_0^1 f'(t)e^{ixt}\mathrm{d}t$$

(b) f étant de classe $\mathcal{C}^1$, f et f' sont continues sur le segment $[0,1]$. Par le théorème des bornes atteintes, elles sont donc bornées (et atteignent leurs bornes, ce dont on ne se sert pas ici).

(c) D'après la question précédente et par inégalité triangulaire, on peut majorer :

$$|I_f(x) + iJ_f(x)| \leq \left|\frac{f(1)e^{ix}}{ix}\right| + \left|\frac{f(0)}{ix}\right| + \left|\frac{1}{ix}\int_0^1 f'(t)e^{ixt}\mathrm{d}t\right|$$

À nouveau par inégalité triangulaire dans l'intégrale, on trouve :

$$|I_f(x) + iJ_f(x)| \leq \frac{|f(1)|}{x} + \frac{|f(0)|}{x} + \frac{1}{x}\int_0^1 |f'(t)|\mathrm{d}t \leq \frac{2M + M'}{x}$$

d'où la conclusion en posant $A = 2M + M'$.

(d) Par encadrement, on obtient que $I_f(x) + iJ_f(x) \to 0$ lorsque $x \to +\infty$; par passage aux parties réelle et imaginaire, on obtient le même résultat sur les fonctions I_f et J_f.

8. (a) Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. On a :

$$\begin{aligned} I_f(x) - I_f(y) &= \int_0^1 f(t)(\cos(xt) - \cos(yt))\mathrm{d}t \\ &= -2\int_0^1 f(t)\sin\left(\frac{x+y}{2}t\right)\sin\left(\frac{x-y}{2}t\right)\mathrm{d}t \end{aligned}$$

En bornant le premier sinus par 1 et en utilisant $|\sin(u)| \leq |u|$ pour tout u réel, on trouve donc :

$$|I_f(x) - I_f(y)| \leq 2\int_0^1 |f(t)|\left|\frac{x-y}{2}\right| t\mathrm{d}t = |x-y|\int_0^1 t|f(t)|\mathrm{d}t$$

(b) La fonction I_f est donc $\int_0^1 t|f(t)|\mathrm{d}t$-lipschitzienne sur $\mathbb{R}$, et d'après le cours elle est donc continue sur $\mathbb{R}$.

9. En posant f la fonction constante égale à 1, on va montrer que $I_f = F$ et $J_f = G$ sur $\mathbb{R}_+$. Si $x = 0$, on trouve $I_f(0) = \int_0^1 \mathrm{d}t = 1 = F(0)$, et $J_f(0) = \int_0^1 0\mathrm{d}t = 0 = G(0)$. Si $x > 0$, on trouve $I_f(x) = \int_0^1 \cos(xt)\mathrm{d}t = \left[\frac{\sin(xt)}{x}\right]_0^1 = \frac{\sin x}{x} = F(x)$, et $J_f(x) = \int_0^x \sin(xt)\mathrm{d}t = \frac{1-\cos x}{x} = G(x)$. D'où la conclusion !