Corrigé du DS n°11 (Algèbre) du 05/06/2024

Correction.

Préliminaire - Calculs "modulo B"

1. (a) On effectue la division euclidienne de P par B : il existe un unique couple $(Q_1, R_1) \in \mathbb{C}[X] \times \mathbb{C}[X]$ tel que $P = BQ_1 + R_1$, où $\deg(R_1) < \deg(B)$.
   De même, il existe un unique couple $(Q_2, R_2) \in \mathbb{C}[X] \times \mathbb{C}[X]$ tel que $Q = BQ_2 + R_2$, où $\deg(R_2) < \deg(B)$.
   On obtient alors
   $$\begin{aligned}\lambda P + \mu Q &= \lambda(BQ_1 + R_1) + \mu(BQ_2 + R_2)\\ &= (\lambda Q_1 + \mu Q_2)B + (\lambda R_1 + \mu R_2)\end{aligned}$$
   De plus, comme $\deg(\lambda R_1 + \mu R_2) \leq \max(\deg(R_1); \deg(R_2)) < \deg(B)$, alors $\lambda R_1 + \mu R_2$ est le reste de la division euclidienne de $\lambda P + \mu Q$ par B. Autrement dit,
   $$\langle \lambda P + \mu Q \rangle = \lambda R_1 + \mu R_2 = \lambda \langle P \rangle + \mu \langle Q \rangle$$
   (b) Si $P \in E$, alors $P = 0 \times B + P$, avec $\deg(P) \leq n - 1 < n = \deg(B)$. Par unicité, le quotient et le reste de la division euclidienne de P par B sont respectivement 0 et P. Autrement dit,
   $$\langle P \rangle = 0$$
   (c)
   - $BQ = BQ + 0$ et $\deg(0) < \deg(B)$, on en déduit par unicité que $\langle BQ \rangle = 0$.
   - Supposons que $\langle P \rangle = 0$. Alors, il existe $Q_1 \in \mathbb{C}[X]$ tel que $P = BQ_1 + 0 = BQ_1$ Donc B divise P.
2.
   - Montrons que f_A est bien définie. Soit $P \in E$. Effectuons la division euclidienne de AP par B ; comme $\deg(B) = n$, le degré du reste sera strictement inférieur à n ; autrement dit,
   $$f_A(P) = \langle AP \rangle \in \mathbb{C}_{n-1}[X] = E$$
   On a bien montré que f_A est bien définie de E dans E.
   - Montrons que f_A est linéaire.
   Soit $P, Q \in E$. Soit $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$. On a
   $$\langle A(\lambda P + \mu Q) \rangle = \langle \lambda AP + \mu AQ \rangle$$
   En appliquant le résultat de la question 1a, on en déduit que
   $$f_A(\lambda P + \mu Q) = \langle A(\lambda P + \mu Q) \rangle = \lambda \langle AP \rangle + \mu \langle AQ \rangle = \lambda f_A(P) + \mu f_A(Q)$$
   f_A est donc bien linéaire. Il s'agit alors d'un endomorphisme.

Partie I - Cas où B est du type $B = (X - \beta)^n$

3. Elle est libre car étagée en degré, et de cardinal $n = \dim E$.
4. Pour tout $P \in E$, pour tout $a \in \mathbb{R}$
   $$P = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{P^{(k)}(a)}{k!}(X - a)^k$$

5. Il nous faut calculer les coordonnées de $f_A(T^k)$ dans la base $\mathcal{T}$, pour tout $k \in [\![0; n-1]\!]$.
   D'après la formule de Taylor, on a en notant $T = (X - \beta)$,
   $$A = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{A^{(k)}(\beta)}{k!}(X - \beta)^k = \sum_{k=0}^{n-1} a_k T^k$$
   On a alors, pour tout $i \in [\![0; n-1]\!]$:
   $$AT^i = \sum_{k=0}^{n-1} a_k T^{k+i} = a_0 T^i + a_1 T^{i+1} + \cdots + a_{n-i-1}T^{n-1} + a_{n-i}T^n + \cdots + a_{n-1}T^{n+i-1}$$
   Donc, d'après la question 2, par linéarité de f_A, on obtient, pour tout $i \in [\![0; n-1]\!]$,
   $$\begin{aligned}f_A(T^i) &= \sum_{k=0}^{n-1} a_k f_A(T^{k+i})\\ &= a_0\langle T^i \rangle + a_1 \langle T^{i+1} \rangle + \cdots + a_{n-i-1}\langle T^{n-1} \rangle + a_{n-i}\langle T^n \rangle + \cdots + a_{n-1}\langle T^{n+i-1} \rangle\end{aligned}$$
   Enfin, d'après les questions 1b et 1c, cela donne, pour tout $i \in [\![0; n-1]\!]$,
   $$f_A(T^i) = a_0 T^i + \cdots + a_{n-i-1}T^{n-1} + 0 = a_0 T^i + \cdots + a_{n-i-1}T^{n-1}$$
   On en déduit alors la représentation matricielle de f_A dans la base $\mathcal{T}$ annoncée.
6. L'endomorphisme f_A est bijectif ssi $\det(f_A) \neq 0$. Or,
   $$\det(f_A) = a_0^n = (A(\beta))^n$$
   Ainsi, f_A est bijectif ssi $A(\beta) \neq 0$, c'est-à-dire ssi β n'est pas racine de A.

Partie II - Cas où B est scindé à racines simples

7. Il s'agit des polynômes interpolateurs de Lagrange. On peut montrer leur existence à l'aide de l'isomorphisme
   $$\varphi : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_{n-1}[X] & \to & \mathbb{R}^n \\ P & \mapsto & (P(\beta_1), \ldots, P(\beta_n)) \end{array}$$
   Il est linéaire par linéarité des évaluations, injectif car un polynôme dans le noyau aura alors n racines, et étant de degré inférieur à $n-1$, il sera nul, et enfin par égalité des dimensions finies de part et d'autre c'est alors un isomorphisme.
   Les L_i sont alors définis pour tout $i \in [\![1; n]\!]$ par $L_i = \varphi^{-1}(e_i)$.
   On peut aussi les expliciter : posons, pour tout $i \in [\![1; n]\!]$,
   $$L_i = \prod_{\substack{k \in [\![1;n]\!] \\ k \neq i}} \frac{X - \beta_k}{\beta_i - \beta_k}$$
   On a bien, pour tout $i \in [\![1; n]\!]$ et pour tout $m \in [\![1; n]\!] \backslash \{i\}$,
   $$L_i(\beta_m) = \prod_{k \neq i} \frac{\beta_m - \beta_k}{\beta_i - \beta_k} = \frac{\beta_m - \beta_m}{\beta_i - \beta_m} \prod_{\substack{k \neq i \\ k \neq m}} \frac{\beta_m - \beta_k}{\beta_i - \beta_k} = 0$$
   et
   $$L_i(\beta_i) = \prod_{k \neq i} \frac{\beta_i - \beta_k}{\beta_i - \beta_k} = 1$$

8. ► Soit $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{C}$, et supposons que $\lambda_1 L_1 + \cdots + \lambda_n L_n = 0_E$. Pour tout $i \in [\![1;n]\!]$, on évalue en β_i : par définition des L_i, on obtient :

$$0 + \cdots + 0 + \lambda_i \times 1 + 0 + \cdots + 0 = 0$$

Ceci étant valable pour tout $i \in [\![1;n]\!]$, on a montré que la famille $(L_1, \ldots, L_n)$ est libre. Étant de plus de cardinal $n = \dim(E)$, il s'agit d'une base de E.

► Soit $P \in E$. La famille $(L_1, \ldots, L_n)$ étant une base de E, il existe $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ uniques tels que :

$$P = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k L_k$$

Pour tout $i \in [\![1;n]\!]$, on évalue P en β_i :

$$P(\beta_i) = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k \underbrace{L_k(\beta_i)}_{=\delta_{i,k}} = \lambda_i, \qquad \text{où} \quad \delta_{i,k} = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad i = k \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Ainsi,

$$P = \sum_{k=1}^{n} P(\beta_k) L_k$$

Les coordonnées de P dans $\mathcal{L}$ sont bien $(P(\beta_1), \ldots, P(\beta_n))$ comme annoncé.

9. Soit $i \in [\![1,n]\!]$. Écrivons la division euclidienne de AL_i par B : il existe $(Q, R) \in \mathbb{C}[X] \times \mathbb{C}[X]$ tel que

$$AL_i = BQ + R \quad \text{et } R \in E$$

On s'intéresse désormais au polynôme R, puisqu'il s'agit de $f_A(L_i)$.
Comme $\mathcal{L}$ est une base de E, et d'après la question précédente, on a

$$R = R(\beta_1) L_1 + \cdots + R(\beta_n) L_n,$$

et donc

$$(\star) \qquad AL_i = BQ + R(\beta_1) L_1 + \cdots + R(\beta_n) L_n$$

On a de plus, en évaluant $(\star)$ en β_i :

$$A(\beta_i) \underbrace{L_i(\beta_i)}_{=1} = (AL_i)(\beta_i) = \underbrace{B(\beta_i)}_{=0} Q(\beta_i) + R(\beta_i)$$

Donc : $R(\beta_i) = A(\beta_i)$.
D'autre part, pour $k \in [\![1;n]\!] \setminus \{i\}$, l'évaluation de $(\star)$ en β_k donne :

$$A(\beta_k) \underbrace{L_i(\beta_k)}_{=0} = (AL_k)(\beta_k) = \underbrace{B(\beta_k)}_{=0} Q(\beta_k) + R(\beta_k)$$

D'où $R(\beta_k) = 0$.
D'où

$$f_A(L_i) = R(\beta_1) L_1 + \cdots + R(\beta_n) L_n = A(\beta_i) L_i$$

10. ► D'après la question précédente,

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{L}}(f_A) = \begin{pmatrix} A(\beta_1) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A(\beta_2) & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & A(\beta_n) \end{pmatrix}$$

► Ainsi, $\det(f_A) = \prod_{i=1}^{n} A(\beta_i)$.

► On en déduit que f_A est bijectif si et seulement si, pour tout $i \in [\![1;n]\!]$, $A(\beta_i) \neq 0$, c'est-à-dire ssi A et B n'ont aucune racine en commun.

11. Soit $P \in E$. D'après la question 8, on a $P = \sum_{k=1}^{n} P(\beta_k) L_k$. Par linéarité de f_A, et par la question 10 précédente, on obtient :

$$f_A(P) = \sum_{k=1}^{n} P(\beta_k) f_A(L_k) = \sum_{k=1}^{n} P(\beta_k) A(\beta_k) L_k = \sum_{k=1}^{n} (AP)(\beta_k) L_k$$

Partie III - Application au calcul du déterminant des matrices circulantes

12. Soit $k \in [\![0;n-1]\!]$. On a, d'après l'astuce fondamentale de l'analyse,

$$X^{n+k} = X^n X^k = (X^n - 1) X^k + X^k = BX^k + X^k$$

Ainsi, par linéarité et en utilisant les questions 1b et 1c :

$$\langle X^{n+k} \rangle = \langle BX^k \rangle + \langle X^k \rangle = X^k$$

13. Pour tout $k \in [\![0;n-1]\!]$, par linéarité de f_A, et d'après la question précédente,

$$f_A(X^k) = \langle AX^k \rangle = \sum_{i=0}^{n-1} c_i \langle X^{i+k} \rangle$$

Dans cette somme, on écrit à part les termes pour lesquels $i + k \geq n$, ce qui donne :

$$\begin{aligned} f_A(X^k) &= c_0 \langle X^k \rangle + c_1 \langle X^{k+1} \rangle + \cdots + c_{n-k-1} \langle X^{n-1} \rangle \\ &\qquad + c_{n-k} \langle X^n \rangle + c_{n-k+1} \langle X^{n+1} \rangle + \cdots + c_{n-1} \langle X^{n+k-1} \rangle \\ &= c_0 X^k + c_1 X^{k+1} + \cdots + c_{n-k-1} X^{n-1} \\ &\qquad + c_{n-k} + c_{n-k+1} X + \cdots + c_{n-1} X^{k-1} \\ &= c_{n-k} + c_{n-k+1} X + \cdots + c_{n-1} X^{k-1} + c_0 X^k + c_1 X^{k+1} + \cdots + c_{n-k-1} X^{n-1} \end{aligned}$$

D'où l'expression annoncée de la matrice de f_A dans la base canonique de E.

NB : Pour comprendre le mécanisme, on peut regarder $f_A(1)$, qui vaut A, puis $f_A(X)$, qui décalera toutes les puissances de 1, et qui fera apparaître un terme en $\langle X^n \rangle = 1$, de sorte que c_{n-1} deviendra le terme constant, etc.

14. D'après la question 10, $\det(f_A) = \prod_{i=1}^{n} A(\beta_i)$, où les β_i désignent les racines de B. En effet, $B = X^n - 1$ est scindé à racines simples, et ses n racines sont les racines n-ièmes de l'unité : pour tout $k \in [\![0;n-1]\!]$, $\beta_k = e^{\frac{2ik\pi}{n}}$.
Ainsi, comme C représente f_A dans la base canonique,

$$\boxed{\det(C) = \det(f_A) = \prod_{k=1}^{n} A\left(e^{\frac{2ik\pi}{n}}\right)}$$

Partie IV - bijectivité de f_A dans le cas général

15. (a) Soit $P \in \mathrm{Ker}(f_A)$. On a donc $\langle AP \rangle = 0$; d'après la question 1c, on en déduit que B divise AP. Or A et B n'ont aucune racine en commun dans $\mathbb{C}$ donc ils sont premiers entre eux. Par le lemme de Gauss, B divise P.

(b) Soit $P \in E$. Supposons de plus $P \in \mathrm{Ker}(f_A)$. Alors B divise P par la question précédente. Or,

$$\deg(P) \leq n-1 < \deg(B)$$

on en déduit que $P = 0$. Ceci étant valable pour tout $P \in E$, on a montré que

$$\mathrm{Ker}(f_A) = \{0_E\}$$

f_A est donc injective. Comme f_A est un endomorphisme et que E est de dimension finie, on en déduit que f_A est un automorphisme.

16. (a) On a

$$f_A(Q_B) = \langle AQ_B \rangle = \langle (X-\alpha)Q_A Q_B \rangle = \langle Q_A B \rangle = 0$$

par la question 1b.

(b) On a trouvé un polynôme de E (car $\deg(Q_B) \leq n-1$), non nul (Q_B non nul car $B \neq 0$), qui appartient à $\mathrm{Ker}(f_A)$; donc f_A n'est pas injective, donc n'est pas bijective.

L'équivalence

$$f_A \text{ est bijectif} \iff \text{A et B n'ont aucune racine en commun}$$

est démontrée, car la question 15 a démontré l'implication réciproque, et le travail précédent a montré l'implication directe par contraposée.

Partie V - déterminant de f_A dans le cas général

17. Soit $A_1, A_2 \in \mathbb{C}[X]$. Soit $P \in E$. On a

$$f_{A_1A_2}(P) = \langle A_1A_2P \rangle$$

Effectuons la division euclidienne de A_2P par B : il existe $Q_2 \in \mathbb{C}[X]$ tel que

$$A_2P = BQ_2 + \langle A_2P \rangle$$

Ainsi, par linéarité, et par la question 1c,

$$\begin{aligned} f_{A_1A_2}(P) = \langle A_1A_2P \rangle &= \langle A_1(BQ_2 + \langle A_2P \rangle) \rangle \\ &= \langle A_1BQ_2 \rangle + \langle A_1 \langle A_2P \rangle \rangle \\ &= 0 + \langle A_1 \langle A_2 P \rangle \rangle \\ &= f_{A_1}\left(f_{A_2}(P)\right) \end{aligned}$$

Ceci étant valable pour tout $P \in E$, on a montré que $f_{A_1A_2} = f_{A_1} \circ f_{A_2}$.

18. Noyons $Y = (X-\alpha)$. Déterminons la matrice de $f_{X-\alpha}$ dans la base $\left(Y^k\right)_{k \in [\![0,n-1]\!]}$.

- Décomposons B dans cette base : il existe (des uniques) $b_0, \ldots, b_{n-1}$ tels que

$$B = \sum_{k=0}^{n-1} b_k Y^k + Y^n$$

En effet, le coefficient en Y^n de B ne peut valoir que 1 car B est unitaire. On sait en outre que, par la formule de Taylor, le coefficient b_k vaut $\frac{B^{(k)}(\alpha)}{k!}$, pour tout $k \in [\![0; n-1]\!]$.

- Soit $i \in [\![0; n-1]\!]$, on a $f_{X-\alpha}(Y^i) = \langle Y^{i+1} \rangle$. Ainsi, pour tout $i \in [\![0; n-2]\!]$, on a $f_{X-\alpha}(Y^i) = Y^{i+1}$, par la question 12 ; et pour $i = n-1$, on a $f_{X-\alpha} = \langle Y^n \rangle$.

Or, on avait $B = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} b_k Y^k + Y^n$, et donc par linéarité,

$$0 = \langle B \rangle = \sum_{k=0}^{n-1} b_k \langle Y^k \rangle + \langle Y^n \rangle = \sum_{k=0}^{n-1} b_k Y^k + \langle Y^n \rangle$$

D'où $\langle Y^n \rangle = -\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} b_k Y^k$.

Finalement, la matrice de $f_{X-\alpha}$ dans la base des (Y^k) est :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -b_0 \\ 1 & \ddots & & \vdots & -b_1 \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 & \\ 0 & & 0 & 1 & -b_{n-1} \end{pmatrix}$$

- Calculons le déterminant de cette matrice. On développe par rapport à la première ligne :

$$\det(f_A) = (-1)^{n+1} \cdot (-b_0) \begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & & \vdots \\ \vdots & \ddots & & \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{vmatrix} = (-1)^n b_0$$

Enfin, comme $b_0 = B(\alpha)$, on obtient la formule attendue : $\det(f_{X-\alpha}) = (-1)^n B(\alpha)$.

19. On a $A = \lambda \displaystyle\prod_{k=1}^{r} (X-\alpha_k)^{m_k}$. De plus, pour tout $P \in E$, $f_\lambda(P) = \langle \lambda P \rangle = \lambda P$, car $P \in E$ (donc $\deg(P) < \deg(B)$).

Ainsi, $f_\lambda = \lambda \mathrm{Id}_E$. Donc par la question 17, on a

$$\begin{aligned} f_A = f_{\lambda \prod_{k=1}^r (X-\alpha_k)^{m_k}} &= f_\lambda \circ \underbrace{f_{X-\alpha_1} \circ \cdots \circ f_{X-\alpha_1}}_{m_1 \text{ fois}} \circ \cdots \circ \underbrace{f_{X-\alpha_r} \circ \cdots \circ f_{X-\alpha_r}}_{m_r \text{ fois}} \\ &= \lambda \mathrm{Id}_E \circ \left(f_{X-\alpha_1}\right)^{m_1} \circ \cdots \circ \left(f_{X-\alpha_r}\right)^{m_r} \end{aligned}$$

Le déterminant d'une composée étant le produit des déterminants, on en déduit

$$\begin{aligned} \det(f_A) &= \lambda^n \times \left(\det\left(f_{X-\alpha_1}\right)\right)^{m_1} \times \ldots \times \left(\det\left(f_{X-\alpha_r}\right)\right)^{m_r} \\ &= \lambda^n \left((-1)^n B(\alpha_1)\right)^{m_1} \ldots \left((-1)^n B(\alpha_r)\right)^{m_r} \quad \leftarrow \text{d'après la question précédente} \\ &= \lambda^n (-1)^{n(m_1 + \cdots + m_r)} \prod_{i=1}^{r} B(\alpha_i)^{m_i} \\ &= \lambda^n (-1)^{nm} \prod_{i=1}^{r} B(\alpha_i)^{m_i} \end{aligned}$$

On a bien $m_1 + \cdots + m_r = m$ car $A = \lambda \displaystyle\prod_{i=1}^{r} (X-\alpha_i)^{m_i}$ et $\deg(A) = m$.

20. En utilisant les égalités $\sum_{i=1}^r m_i = m$ et $\sum_{j=1}^q n_j = n$, on a :

$$\begin{aligned}
\prod_{j=1}^q A(\beta_j)^{n_j} &= \prod_{j=1}^q \left(\lambda \prod_{i=1}^r (\beta_j - \alpha_i)^{m_i}\right)^{n_j} \\
&= \prod_{j=1}^q \lambda^{n_j} \prod_{i=1}^r (\beta_j - \alpha_i)^{m_i n_j} \\
&= \lambda^n \prod_{j=1}^q \prod_{i=1}^r (-1)^{m_i n_j} (\alpha_i - \beta_j)^{m_i n_j} \\
&= \lambda^n \prod_{i=1}^r \prod_{j=1}^q (-1)^{m_i n_j} (\alpha_i - \beta_j)^{m_i n_j} & \leftarrow \text{on intervertit les deux produits} \\
&= \lambda^n \prod_{i=1}^r (-1)^{m_i n} \underbrace{\left(\prod_{j=1}^q (\alpha_i - \beta_j)^{n_j}\right)^{m_i}}_{=B(\alpha_i)^{m_i}} \\
&= \lambda^n (-1)^{mn} \prod_{i=1}^q B(\alpha_i)^{m_i} \\
&= \det(f_A)
\end{aligned}$$

On a bien montré que $\det(f_A) = \prod_{j=1}^q A(\beta_j)^{n_j}$.

Partie VI - l'ensemble des f_A, où $A \in \mathbb{C}[X]$

21. Soit $A_1, A_2 \in \mathbb{C}[X]$. Soit $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$. Soit $P \in E$. En utilisant la question 1a,

$$\begin{aligned}
\Phi(\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2)(P) = f_{\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2}(P) &= \langle (\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2) P \rangle \\
&= \lambda_1 \langle A_1 P \rangle + \lambda_2 \langle A_2 P \rangle \\
&= \lambda_1 \Phi(A_1)(P) + \lambda_2 \Phi(A_2)(P) \\
&= (\lambda_1 \Phi(A_1) + \lambda_2 \Phi(A_2))(P)
\end{aligned}$$

Cette égalité étant vraie pour tout $P \in E$, on a $\Phi(\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2) = \lambda_1 \Phi(A_1) + \lambda_2 \Phi(A_2)$; Φ est donc linéaire.

22. ► Soit $A \in \mathrm{Ker}(\Phi)$. On a donc $f_A = 0_{\mathcal{L}(E)}$, autrement dit, pour tout $P \in E$, $0 = f_A(P) = \langle AP \rangle$. Par la question 1c, on en déduit que, pour tout $P \in E$, B divise AP. Ceci étant en particulier vrai pour $P = 1$, on en déduit que B divise A. On a montré que $\mathrm{Ker}(\Phi)$ est inclus dans l'ensemble des polynômes divisibles par B.
Réciproquement, si A est divisible par B : il existe $Q \in \mathbb{C}[X]$ tel que $A = BQ$. On a alors, pour tout $P \in E$,

$$\Phi(A)(P) = \langle AP \rangle = \langle BQP \rangle = 0,$$

par la question 1c. Ainsi, $A \in \mathrm{Ker}(\Phi)$. On a montré l'inclusion inverse.
Finalement, $\mathrm{Ker}(\Phi)$ est bien l'ensemble des polynômes divisibles par B.

► Soit $A \in \mathrm{Ker}(\Phi) \cap E$. Ainsi, A est de degré $m \leq n-1 < n$, et il est divisible par B, qui est de degré n ; A est donc le polynôme nul. On a montré que $\mathrm{Ker}(\Phi) \cap E = \{0_{\mathbb{C}[X]}\}$.
De plus, soit $A \in \mathbb{C}[X]$. Par division euclidienne de A par B, il existe un unique couple $(Q, R) \in \mathbb{C}[X] \times \mathbb{C}[X]$ tel que $A = BQ + R$, où $\deg(R) < \deg(B) = n$.
D'une part, BQ est un polynôme divisible par B, il est donc dans $\mathrm{Ker}(\Phi)$, et d'autre part, $R \in E$ car $\deg(R) \leq n-1$. La somme de ces deux polynômes valant A, et ce raisonnement étant valable pour tout $A \in \mathbb{C}[X]$, on a montré que $\mathrm{Ker}(\Phi) + E = \mathbb{C}[X]$.
Ainsi, $\mathrm{Ker}(\Phi)$ et E sont supplémentaires dans $\mathbb{C}[X]$.

NB : la division euclidienne fournissant également l'unicité, on aurait pu se passer de montrer que $\mathrm{Ker}(\Phi) \cap E = \{0\}$.

23. On a montré que $\mathrm{Ker}(\Phi) \oplus E = \mathbb{C}[X]$. Or, par le théorème de l'isomorphisme, $\mathrm{Im}(\Phi)$ est isomorphe à tout supplémentaire de $\mathrm{Ker}(\Phi)$. On en déduit que $\mathrm{Im}(\Phi)$ est isomorphe à E, qui est de dimension n. Ainsi, $\boxed{\dim(\mathrm{Im}(\Phi)) = n}$.
D'autre part, $\dim(\mathcal{L}(E)) = \dim(\mathcal{L}(E,E)) = \dim(E) \times \dim(E) = n^2$. Donc,
- si $n = 1$, alors $\mathrm{Im}(\Phi) \subset \mathcal{L}(E)$ et il y a égalité des dimensions, donc $\mathrm{Im}(\Phi) = \mathcal{L}(E)$
- si $n \geq 2$, alors $n^2 \neq n$, donc $\mathrm{Im}(\Phi) \neq \mathcal{L}(E)$.