

Devoir 1 : devoirana26cor.tex

Partie I – Convergence d’une suite

1. Soit $m \in \mathbb{N}$. Alors $\frac{m}{2} \in \mathbb{R}^+$, donc la fonction $u \mapsto u^{m/2}$ est continue sur $\mathbb{R}^+$. De plus, la fonction $t \mapsto (1 - t^2)$ est continue sur $[0, 1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}^+$. Par composition, la fonction $t \mapsto (1 - t^2)^{m/2}$ est continue par morceaux (car continue) sur $[0, 1]$. I_m a bien un sens.

Calculons $I_{m+1} - I_m$ pour tout entier $m \in \mathbb{N}$: $I_{m+1} - I_m = \int_0^1 (1 - t^2)^{m/2} (\sqrt{1 - t^2} - 1) dt$.

Pour tout $t \in [0, 1]$, $0 \leq t^2 \leq 1$ donc $0 \leq 1 - t^2 \leq 1$. La fonction racine étant croissante sur $\mathbb{R}^+$,

$$\forall t \in [0, 1], \sqrt{1 - t^2} \leq 1 \quad \text{et} \quad (1 - t^2)^{m/2} \geq 0$$

Ainsi, la fonction sous l’intégrale est négative, et on intègre entre 0 et 1, ($0 \leq 1$), donc :

$$\forall m \in \mathbb{N}, I_{m+1} - I_m \leq 0 ; (I_m)_m \text{ est décroissante}$$

2. Soit $m \in \mathbb{N}$. On va intégrer par parties I_{m+2} .

On pose : $u(t) = (1 - t^2)^{m/2+1}$, alors $u'(t) = (\frac{m}{2} + 1)(-2t)(1 - t^2)^{m/2} = -(m + 2)t(1 - t^2)^{m/2}$.

On pose : $v'(t) = 1$, $v(t) = t$.

Les fonction u, v sont de classe C^1 sur $[0, 1]$. Par intégration par parties, en utilisant que $u(1) = 0$ et $v(0) = 0$:

$$I_{m+2} = [u(t)v(t)]_0^1 - \int_0^1 u'(t)v(t)dt = (m + 2) \int_0^1 t^2(1 - t^2)^{m/2}dt$$

3. Or $t^2 = 1 - (1 - t^2)$, donc $\int_0^1 t^2(1 - t^2)^{m/2}dt = I_m - I_{m+2}$.

On a alors : $I_{m+2} = (m + 2)(I_m - I_{m+2})$. En faisant passer le terme en I_{m+2} dans le membre de gauche et en divisant par $m + 3$, on obtient :

$$\forall m \in \mathbb{N}, I_{m+2} = \frac{m + 2}{m + 3} I_m.$$

4. (a) $I_2 = \int_0^1 (1 - t^2)^1 dt = \left[\frac{2}{3} \right]$.

(b) On a : $I_1 = \int_0^1 \sqrt{1 - t^2} dt$. On va effectuer un théorème de changement de variable.

On pose $\varphi : [0, \frac{\pi}{2}] \rightarrow [0, 1]$, définie par : $\varphi(u) = \sin(u) = t$.

φ est de classe C^1 sur $[0, \frac{\pi}{2}]$, et est à valeurs dans $[0, 1]$.

De plus, $dt = \varphi'(u)du = \cos(u)du$. Par changement de variable :

$$I_1 = \int_0^1 \sqrt{1 - t^2} dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \sin^2(u)} \cos(u) du = \int_0^{\frac{\pi}{2}} |\cos(u)| \cos(u) du = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} (1 + \cos(2u)) du = \left[\frac{\pi}{4} \right]$$

5. (a) soit $n \in \mathbb{N}^*$. $u_n \neq 0$ et :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\sqrt{2(n+1)}}{\sqrt{2n}} \cdot \frac{2^{2n+1}}{2^{2n+3}} \cdot \frac{(2n+2)!n!n!}{(n+1)!(n+1)!(2n)!} = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{n+1}{n}} \frac{2(n+1)(2n+1)}{(n+1)^2} = \left[\frac{2n+1}{2\sqrt{n}\sqrt{n+1}} \right]$$

La question 3 donne une relation de récurrence, et la question 3 l’initialisation. On va donc prouver ce résultat par récurrence.

— Initialisation :

Pour $n = 1$, $I_2 = \frac{2}{3}$ et $\frac{\sqrt{2}}{2 \cdot 3 \cdot a_{1,1}} = \frac{4}{2 \cdot 3} = \frac{2}{3} = I_2$.

et $\frac{\pi}{\sqrt{2}} a_{1,1} = \frac{\pi}{4} = I_1$, d'où les deux égalités pour $n = 1$.

— Hérité : soit $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose que :

$$I_{2n} = \frac{\sqrt{2n}}{2(2n+1)u_n}, \quad \text{et :} \quad I_{2n-1} = \frac{\pi}{\sqrt{2n}} u_n.$$

Regardons le rang suivant. D'après la question 3, et l'hypothèse de récurrence :

$$I_{2(n+1)} = I_{2n+2} = \frac{2n+2}{2n+3} I_{2n} = \frac{2(n+1)}{2n+3} \cdot \frac{\sqrt{2n}}{2(2n+1)u_n}$$

Or par (a), $(2n+1)u_n = 2\sqrt{n}\sqrt{n+1}u_{n+1}$, donc en remplaçant :

$$I_{2n+2} = \frac{2(n+1)\sqrt{2}\sqrt{n}}{2(2n+3)2\sqrt{n}\sqrt{n+1}u_{n+1}} = \boxed{\frac{\sqrt{2}\sqrt{n+1}}{2(2n+3)u_{n+1}}}$$

On fait de même pour le terme en I_{2n-1} :

$$I_{2n+1} = \frac{2n+1}{2n+2} I_{2n-1} = \frac{(2n+1)\pi u_n}{2(n+1)\sqrt{2n}} = \frac{\pi \cdot 2 \cdot \sqrt{n}\sqrt{n+1}u_{n+1}}{2(n+1)\sqrt{2}\sqrt{n}} = \frac{\pi u_{n+1}}{\sqrt{2(n+1)}}$$

— Conclusion de récurrence. On a montré que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \boxed{I_{2n} = \frac{\sqrt{2n}}{2(2n+1)u_n}, \quad \text{et :} \quad I_{2n-1} = \frac{\pi}{\sqrt{2n}} u_n.}$$

6. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. D'après l'expression précédente, comme $u_n > 0$, alors $I_{2n} > 0$.

(on pourrait aussi utiliser l'intégrale d'une fonction continue positive non identiquement nulle).

Comme la suite $(I_m)_m$ est décroissante, on a : $I_{2n} \leq I_{2n-1} \leq I_{2n-2}$.

En divisant l'inégalité par $I_{2n} > 0$, on obtient l'inégalité demandée.

On va remplacer dans l'inégalité précédente par les valeurs trouvées à la question précédente, pour $n \geq 1$, et pour le quotient de droite, par l'égalité de la question 3.

$$1 \leq \frac{\pi u_n^2 2(2n+1)}{2n} \leq \frac{2n+1}{2n}$$

En divisant par $\frac{2n+1}{2n} = 1 + \frac{1}{2n} > 0$, on obtient :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{1}{1 + \frac{1}{2n}} \leq 2\pi (u_n)^2 \leq 1.}$$

7. Par encadrement, $\lim_{n \rightarrow +\infty} 2\pi u_n = 1$.

Or $u_n \geq 0$, donc $\boxed{u_n = \sqrt{u_n^2} \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \text{ quand } n \rightarrow +\infty.}$

En utilisant les expressions de la question 5 :

$$\boxed{I_{2n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\sqrt{2n} \cdot \sqrt{2\pi}}{2(2n)} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{n}}.}$$

Partie II – Calcul d’une intégrale de Gauss

8. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Je pose $u = \frac{t}{\sqrt{n}}$, doit $\varphi : u \mapsto \sqrt{n}u = t$.
 $\varphi \in C^1([0, 1])$. Par théorème de changement de variables,

$$J_n = \int_0^1 (1 - u^2)^n \sqrt{n} du = \sqrt{n} I_{2n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{2} \sqrt{\pi}$$

la suite $(J_n)_{n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}}$ converge sa limite est : $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

9. Attention ici, on considère $t \in \mathbb{R}^+$ fixé (un paramètre), et on regarde la limite lorsque $n \rightarrow +\infty$.
 Comme $n \rightarrow +\infty$, à partir d’un certains rang n_0 , pour tout $n \geq n_0$,

, $0 \leq t < \sqrt{n}$, donc $\frac{t^2}{n} < 1$ par croissance de $u \mapsto u^2$ sur $\mathbb{R}^+$.

Ainsi, $1 - \frac{t^2}{n} > 0$, et $w_n(t) > 0$.

De plus, pour tout $n \geq n_0$,

$$w_n(t) = \exp(n \ln(1 - \frac{t^2}{n})) = \exp(n(-\frac{t^2}{n} + o(\frac{1}{n}))) = \exp(-t^2 + o(1)).$$

Par continuité de $\exp$ est $-t^2$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n(t) = \exp(-t^2) = l(t)$.

On admet pour la suite l’inégalité suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall t \in [0, \sqrt{n}], \quad 0 \leq e^{-t^2} - \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n \leq \frac{e}{n}$$

10. Prenons l’inégalité admise sur $[0, \sqrt{n}]$, et intégrons de 0 à $\sqrt{n}$:

$$0 \leq \int_0^{\sqrt{n}} (e^{-t^2} - w_n(t)) dt \leq \frac{e\sqrt{n}}{n} = \frac{e}{\sqrt{n}}$$

Ainsi, $0 \leq \varphi(\sqrt{n}) - J_n \leq \frac{e}{\sqrt{n}}$.

Chacun des termes ayant une limite en $+\infty$, on peut passer des inégalités à la limite :

$$0 \leq \alpha - \frac{\sqrt{\pi}}{2} \leq 0 \quad \text{donc} \quad \alpha = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

11. Soit $x \in \mathbb{R}^+$. Posons : $v(x) = \int_{-x}^x e^{-\frac{t^2}{2}} \frac{dt}{\sqrt{2\pi}}$ On pose $t = \sqrt{2}t'$ comme changement de variable affine dans l’intégrale. Ainsi,

$$v(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-x/\sqrt{2}}^{x/\sqrt{2}} e^{-t'^2} dt' = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \varphi\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) - \varphi\left(-\frac{x}{\sqrt{2}}\right)$$

Comme $t \mapsto e^{-t^2}$ est paire, $\varphi(-\frac{x}{\sqrt{2}}) = \varphi(\frac{x}{\sqrt{2}})$. Donc $v(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \varphi(\frac{x}{\sqrt{2}})$

Or on a vu à la question précédente que φ avait une limite en $+\infty$ et on a sa valeur : α .

Donc

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_{-x}^x e^{-\frac{t^2}{2}} \frac{dt}{\sqrt{2\pi}} = 1$$

Ainsi K existe et vaut 1.

Partie III – Calcul d’une majoration

12(a) Soit $x \in [0, \frac{1}{2}]$. Alors $1 - x > 0$ et $1 + x > 0$. On résout par équivalence :

$$\frac{1-x}{1+x} = e^{-2x+g(x)} \Leftrightarrow g(x) = 2x + \ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right).$$

On pose donc $g : x \mapsto 2x + \ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right)$.

(b) On pose $a : x \mapsto \frac{g(x)}{x^3}$. Effectuons un développement limité à l'ordre 3 en 0 de g pour obtenir la limite de a en 0 :

$$g(x) = 2x + \ln(1-x) - \ln(1+x) = 2x - x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + o(x^3) - (x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)) = x^3(-\frac{2}{3} + o(1)).$$

Ainsi, $\lim_{x \rightarrow 0} a(x) = -\frac{2}{3}$

(c) Par composition, $x \mapsto \frac{1-x}{1+x}$ est continue sur $[0, \frac{1}{2}]$, à valeurs dans $]0, +\infty[$, intervalle sur lequel $\ln$ est continue.

Par composition et quotient, a est continue sur $]0, \frac{1}{2}]$. D'après la question précédente, si on pose $a(0) = -\frac{2}{3}$, la fonction ainsi prolongée est alors continue en 0, donc sur $[0, \frac{1}{2}]$.

a est une fonction continue sur un segment $[0, \frac{1}{2}]$, elle est donc bornée et atteint ses bornes par le théorème des bornes atteintes. Donc :

$$\exists M \in \mathbb{R}^+, \forall x \in [0, \frac{1}{2}], |a(x)| \leq M.$$

En multipliant par $|x^3| = x^3$, pour $x \in]0, \frac{1}{2}]$, et en remarquant que l'inégalité reste vraie pour $x = 0$, on obtient :

$$\forall x \in [0, \frac{1}{2}], |g(x)| \leq Mx^3$$

13. Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, et $k \in [[n+1, 2n]]$.

Calculons le produit :

$$P = \frac{\prod_{i=1}^{k-n-1} (1 - \frac{i}{n})}{\prod_{i=1}^{k-n-1} (1 + \frac{i}{n})} \times \frac{n}{k} = \frac{\frac{1}{n^{k-n-1}} \prod_{i=1}^{k-n-1} (n-i)}{\frac{1}{n^{k-n-1}} \prod_{i=1}^{k-n-1} (n+i)} \times \frac{n}{k} = \frac{\prod_{i'=2n-k+1}^{n-1} i'}{\prod_{j=n+1}^{k-1} j} \times \frac{n}{k} = \frac{n!}{(2n-k)!} \times \frac{n!}{k!}$$

De plus, $\frac{a_{k,n}}{a_{n,n}} = \frac{(2n)!}{k!(2n-k)!} \times \frac{n!n!}{(2n)!} = \frac{n!n!}{k!(2n-k)!} = P$

14. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, et k un entier tel que $n+1 \leq k \leq \frac{3n}{2} + 1$.

Ainsi, $\frac{k-1}{n} \in [1, \frac{3}{2}]$, et donc pour tout $i \in [[1, k-n-1]]$, $0 \leq \frac{i}{n} \leq \frac{k-1}{n} - 1 \leq \frac{1}{2}$.

Ainsi, $\frac{i}{n} \in [0, \frac{1}{2}]$, le domaine de définition de g , et on a :

$$\forall i \in [[1, k-n-1]], 0 \leq \frac{1 - \frac{i}{n}}{1 + \frac{i}{n}} = \exp(-2\frac{i}{n} + g(\frac{i}{n})).$$

On multiplie membre à membre les inégalités entre nombres positifs, et on obtient :

$$P = \prod_{i=1}^{k-n-1} \exp\left(-2\frac{i}{n} + g\left(\frac{i}{n}\right)\right) = \exp\left(\sum_{i=1}^{k-n-1} \frac{-2}{n}i + g\left(\frac{i}{n}\right)\right) = e^{\frac{-2}{n} \cdot \frac{(k-n-1)(k-n)}{2}} \cdot \exp\left(\sum_{i=1}^{k-n-1} g\left(\frac{i}{n}\right)\right)$$

Je pose $b_{k,n} = \sum_{i=1}^{k-n-1} g(\frac{i}{n})$. On a alors, d'après la question précédente, $\frac{a_{k,n}}{a_{n,n}} = \frac{n}{k} e^{b_{k,n}} e^{-\frac{1}{n}(k-n-1)(k-n)}$

Majorons $b_{k,n}$ à l'aide de l'inégalité triangulaire et de la majoration obtenue sur g :

$$|b_{k,n}| \leq \sum_{i=1}^{k-n-1} |g(\frac{i}{n})| \leq \sum_{i=1}^{k-n-1} \frac{M}{n^3} i^3 \leq \frac{M}{n^3} \sum_{i=1}^{k-n-1} (k-n-1)^3 \leq \frac{M(k-n-1)^4}{n^3}$$

Partie IV – Vers le théorème de Moivre-Laplace

15. $X_n(\Omega) = [[0, 2n]]$, ainsi $Z_n(\Omega) = \{\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n}}(k-n), k \in [[0, 2n]]\}$.

• La loi de Z_n est définie par : $P(Z_n = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n}}(k-n)) = P(X_n = k) = \binom{2n}{k} p^k (1-p)^{2n-k}$, pour tout $k \in [[0, 2n]]$.

• Par linéarité de l'espérance, $E(Z_n) = \frac{1}{\sqrt{2n}}(2E(X_n) - 2n) = \frac{1}{\sqrt{2n}}(2 * 2n * \frac{1}{2} - 2n) = \boxed{0}$.

• Par propriété sur la variance, $V(Z_n) = (\frac{2}{\sqrt{2n}})^2 V(X_n) = \frac{2}{n} * 2n * \frac{1}{2}(1 - \frac{1}{2}) = \boxed{1}$.

16. Soit $x \in]0, +\infty[$. Comme $\beta_n = \sqrt{2n} + \frac{1}{\sqrt{2n}} \rightarrow +\infty$, il existe un rang $n_0 \in \mathbb{N}$, tel que pour tout $n \geq n_0$, $x \leq \beta_n$.

Ainsi, $x \in \left[-\sqrt{2n} - \frac{1}{\sqrt{2n}}, \sqrt{2n} + \frac{1}{\sqrt{2n}}\right] = \bigcup_{k=0}^{2n} J_{k,n}$. Cette réunion étant disjointe, il existe $k_n \in \mathbb{N}$, tel que $x \in J_{k_n,n}$.

On a alors, par définition de $J_{k_n,n}$ et de $t_{k_n,n}$:

$$\frac{2(k_n - n)}{\sqrt{2n}} - \frac{1}{\sqrt{2n}} \leq x \leq \frac{2(k_n - n)}{\sqrt{2n}} + \frac{1}{\sqrt{2n}}$$

On obtient alors : $x - \frac{1}{\sqrt{2n}} \leq \frac{2(k_n - n)}{\sqrt{2n}} \leq x + \frac{1}{\sqrt{2n}}$ Par encadrement : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2(k_n - n)}{\sqrt{2n}} = x$

Comme $x \neq 0$, on obtient : $t_{k_n,n} = \frac{2(k_n - n)}{\sqrt{2n}} \sim x$ quand $n \rightarrow +\infty$, d'où :

$$k_n - n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{x\sqrt{2n}}{2} \quad \text{et} \quad t_{k_n,n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} x$$

Enfin, en divisant la première équivalence par n : $\frac{k_n}{n} - 1 \sim \frac{x\sqrt{2}}{2\sqrt{n}} \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow +\infty$.

Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{k_n}{n} - 1 = 0$. Ainsi, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{k_n}{n} = 1$. On obtient alors :

$$k_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n.$$

17. • Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Comme $t_{k,n} \in J_{k,n}$, $h_n(t_{k,n}) = \frac{\sqrt{2n}}{2} \binom{2n}{k} \frac{1}{2^{2n}} = \frac{\sqrt{2n}}{2^{2n+1}} \binom{2n}{k} = \boxed{a_{k,n}}$.

• Soit $t \in \mathbb{R}^{+*}$. Alors d'après la question 16, à partir d'un certain rang n_0 , pour tout $n \geq n_0$, il existe $k_n \in [[0, 2n]]$, tel que : $t \in J_{k_n,n}$.

Ainsi, $h_n(t) = h_n(t_{k_n,n}) = a_{k_n,n}$. De plus, $k_n - n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{t\sqrt{2n}}{2} \rightarrow +\infty$ d'après la question 16, et donc à partir d'un certain rang n_1 , $k_n - n \geq 1$.

De même, $k_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n$, donc à partir d'un certain rang n_2 , $\frac{k_n}{n} \leq 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$.

• Ainsi, en posant $n_3 = \max(n_0, n_1, n_2)$, pour tout $n \geq n_3$, on a : $n + 1 \leq k_n \leq \frac{3n}{2} + 1$. On peut donc appliquer la question 14 :

$$\frac{a_{k_n,n}}{a_{n,n}} = \frac{n}{k_n} e^{-\frac{1}{n}(k_n-n-1)(k_n-n)} e^{b_{k_n,n}}$$

avec la majoration de $b_{k_n,n}$.

Or $k_n - n$ tend vers $+\infty$, donc 1 est négligeable devant $k_n - n$. Ainsi

$$\frac{-1}{n}(k_n-n-1)(k_n-n) \sim \frac{t^2 n}{2n} = \frac{-t^2}{2} \text{ Par continuité de l'exponentielle, } \boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} e^{-\frac{1}{n}(k_n-n-1)(k_n-n)} = e^{-x^2/2}}$$

• De plus, $k_n \sim n$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{k_n}{n} = 1$.

• De même que pour le premier terme, $(k_n - n - 1)^4 \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{x^4 n^2}{4}$ donc $\frac{(k_n - n - 1)^4}{n^3} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{x^4}{4n} \rightarrow 0$.

Or, par majoration,

$$|b_{k_n,n}| \leq \frac{M}{n^3} (k_n - n - 1)^4$$

Par encadrement, $b_{k_n,n}$ tend vers 0 lorsque $n \rightarrow +\infty$. On vient de montrer que

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{k_n,n}}{a_{n,n}} = \exp\left(\frac{-t^2}{2}\right)}$$

• Or d'après la question 7, $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_{n,n} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$.

On obtient donc : $\boxed{\forall t > 0, \lim_{n \rightarrow +\infty} h_n(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2}}$.