DM9 – Quelques problèmes classiques

À rendre pour le 01/04/2025.

Ce devoir propose trois problèmes au choix *: l'un parfaitement élémentaire, un autre un plus proche du cours et un autre plus éloigné, mais plus guidé. Les difficultés des deux sont probablement comparables.*

Exercice 1.

Prouver que tout entier pair supérieur à 3 peut s'écrire comme la somme de deux nombres premiers.

Exercice 2.

Soit

$$\begin{array}{rccl} \zeta: &]1,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & s & \longmapsto & \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s} \end{array}$$

On admet que ζ admet un prolongement holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus \{1\}$. Montrer que pour tout $z \neq 1$,

$$\text{si } 0 < \mathrm{Re}(z) < 1 \text{ et } \zeta(z) = 0 \text{ alors } \mathrm{Re}(z) = 1/2.$$

Exercice 3.

On considère les équations de Navier-Stokes en dimension 3 d'espace et sans force extérieure.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} = -\nabla p + \nu \Delta \mathbf{v} \\ \nabla \cdot \mathbf{v} = 0. \end{cases}$$

On admet le résultat de Leray d'existence d'une solution faible globale si $\mathbf{v}_0 \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R}^3)$ est compatible.

1. Rappeler la régularité de la solution de Leray.
2. En supposant des conditions de croissance à l'infini et autant de régularité que nécessaire sur $\mathbf{v}_0$, montrer que la solution de Leray est en fait forte et globale.