Programme de colle : semaine 18 du 24/02 au 28/02.

Rappel : les seules démonstrations exigibles sont indiquées par un ♠.

Chapitre 14 : Polynômes et fractions rationnelles

- Fractions rationnelles : construction hors-programme, définition axiomatique.
- Forme irréductible.
- Somme et produit de fractions rationnelles. Ne dépendent pas des représentants choisis (♠ pour le produit).
- Degré d'une fraction rationnelle. Propriétés.
- Fonction rationnelle associée. Racines, pôles.
- Partie entière d'une fraction rationnelle.
- Décompositions en éléments simples dans $\mathbb{C}(X)$ et $\mathbb{R}(X)$.
- Coefficient $a \in \mathbb{K}$ de $\frac{a}{X-\lambda}$ dans la décomposition de $\frac{A}{B}$ quand λ est un pôle simple de $\frac{A}{B}$.
- Détermination des coefficients par des multiplications bien choisies suivies d'évaluations ou de calculs de limites bien choisis.
- Applications : calcul de primitives ou d'intégrales, de dérivées $n^{\text{èmes}}$ de fonction rationnelles.
- Dérivée logarithmique d'un polynôme (décomposition en éléments simples de $\frac{P'}{P}$)

Exemples de cours ♠

- Calcul des dérivées $n^{\text{èmes}}$ de $x \mapsto \frac{x}{(x-1)(x-2)}$

Chapitre 15 : analyse asymptotique

Certains résultats ont été énoncés uniquement pour les suites ou pour des fonctions $f : I \to \mathbb{R}$ mais sont valables pour les deux. Les étudiants doivent savoir traduire les énoncés dans un sens où dans l'autre en traduisant $x \to a$ (avec $a \in I$ ou une extrémité de I) par $n \to +\infty$ et « au voisinage de a » par « à partir d'un certain rang ».

- Négligeabilité d'une suite devant une autre. D'une fonction devant une autre au voisinage de $a \in I$ ou une borne de I. Interprétation comme quotient. Notation $u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(v_n)$.
- Équivalence de fonctions au voisinage de $a \in I$ ou une extrémité de I. Idem avec les suites. Interprétation comme quotient. Notation $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$.
- Domination. Notation $u_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathcal{O}(v_n)$.
- $\sim$ et $=o()$ impliquent $= \mathcal{O}()$.
- Lien entre o et limite finie.
- Lien entre $\sim$ et limites.
- $\underset{a}{\sim}$ est une relation d'équivalence.
- La relation $= \underset{a}{o}$ est transitive.
- Transitivité mixte : si $f \underset{a}{\sim} g$ et $g = \underset{a}{o}(h)$ alors $f = \underset{a}{o}(h)$. Si $f = \underset{a}{o}(g)$ et $g \underset{a}{\sim} h$ alors $f = \underset{a}{o}(h)$.
- Si $f \sim_a g$ alors f et g ont le même signe au voisinage de a.
- Opérations : sommes de o identiques, multiplication par une constante non-nulle, multiplications de o, multiplications d'$\sim$, inverses et quotients d'équivalents. Composition à droite.
- Quelques compositions à gauche qui fonctionnent : puissances, valeur absolue.
- Les propriétés de la relation $=o()$ sont encore valables pour $= \mathcal{O}()$.
- Équivalents usuels en 0 : $\sin(x)$, $\tan(x)$, $\ln(1+x)$, $\arcsin(x)$, $\arctan(x)$, $e^x - 1$, $\mathrm{sh}(x)$, $\mathrm{th}(x)$, $(1+x)^\alpha - 1$.
- Équivalents de combinaisons linéaires de puissances en 0, en $+\infty$.
- Croissances comparées reformulées avec des o.

Exemples de cours ♠

- Preuve d'un ou deux des équivalents usuels en 0.

Prochain programme

- Développements limités, développements asymptotiques.
- Début du chapitre 16 : espaces vectoriels.