DM7 – Polynômes

À rendre pour le 24/02/2025.
Consignes de présentation : cf. DM1

Exercice 1. Polynômes de Tchebvychev

Partie I : construction des $\mathbf{T_n}$

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. A l'aide de formules de trigonométrie, exprimer $\cos(2x)$ en fonction de $\cos(x)$, et vérifier notamment que l'on a $\cos(2x) = T_2(\cos(x))$, où T_2 est le polynôme $T_2 = 2X^2 - 1$.
2. Montrer de même que l'on a $\cos(3x) = T_3(\cos(x))$ pour un polynôme T_3 de degré 3 que l'on précisera.

On s'intéresse désormais à la question suivante : pour $n \in \mathbb{N}$ quelconque, existe-t-il toujours un polynôme T_n tel que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \cos(nx) = T_n(\cos(x)) \tag{E_n}$$

3. Justifier l'existence de T_0 et de T_1.
4. On fixe $n \in \mathbb{N}$. Montrer que si un tel polynôme T_n existe, alors il est unique.
5. Redémontrer la formule de factorisation

$$\cos(a) + \cos(b) = 2\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)$$

6. Soit $n \geq 1$. Factoriser $\cos((n+1)x) + \cos((n-1)x)$, pour $x \in \mathbb{R}$, et en déduire que si T_{n-1} et T_n existent, alors T_{n+1} aussi, en posant

$$T_{n+1} = 2XT_n - T_{n-1}$$

   En déduire l'existence de T_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
7. A l'aide de cette relation de récurrence, déterminer le degré de T_n et son coefficient dominant.

Partie II : forme factorisée de $\mathbf{T_n}$

Dans cette partie, on fixe un entier $n \geq 1$.

8. Déterminer les $x \in \mathbb{R}$ tels que $\cos(nx) = 0$.
9. En déduire les $x \in [0, \pi]$ tels que $\cos(nx) = 0$. On montrera notamment qu'il y en a exactement n.
10. En déduire n racines de T_n, puis la décomposition en facteurs irréductibles de T_n dans $\mathbb{R}[X]$.
11. A l'aide de (E_n), déterminer $T_n(0)$. On pourra distinguer le cas n pair et le cas n impair.
12. Déduire des deux questions précédentes la valeur du produit

$$p_n = \prod_{k=0}^{n-1} \cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right).$$